Matematica 2 (Chimica) - 13 Giugno 2022

1) Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 1)$, determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo relativo. Determinare l'espressione generale delle derivate direzionali di f nell'origine.

2) Risolvere l'equazione differenziale: $y'' - y' = xe^x$. Determinare quindi l'espressione della soluzione $\bar{y}$ per cui $\lim_{x\to-\infty} \bar{y}(x) = 0$ e $\bar{y}(0) = 1$.

Motivare tutte le risposte

cenni di svolgimento

1) Cominciamo con lo studiare il segno della funzione:

$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + y^2 = 1$;

$f(x, y) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$;

dunque la funzione taglia il piano xy lungo l'asse delle x e lungo la circonferenza unitaria centrata nell'origine. La funzione f è un polinomio ed è quindi di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y) = (3x^2 + y^2 - 1, 2xy) \tag{1}$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, quindi non ci sono punti di non derivabilità e la frontiera del dominio è l'insieme vuoto. Segue che i punti di massimo e minimo relativo sono da ricercare, se esistono, solo tra i punti critici. Ora,

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1/\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

così i punti critici sono $(x, y) = (0, 1), (0, -1), (1/\sqrt{3}, 0), (-1/\sqrt{3}, 0)$.

Dallo studio del segno possiamo escludere che siano estremanti sia $(0,1)$ che $(0,-1)$. Per gli altri due punti controlliamo tramite l'hessiano:

$$H^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

da cui $Hf(1/\sqrt{3},0) = 4 > 0 \wedge f(1/\sqrt{3},0) = 6/\sqrt{3} > 0$ e dunque $(x,y) = (1/\sqrt{3},0)$ è un punto di minimo relativo; in maniera analoga si prova che $(x,y) = (-1/\sqrt{3},0)$ è un punto di massimo relativo.

Poiché f è differenziabile nell'origine, per ogni versore $\lambda = (\alpha,\beta)$ si ha

$$f_\lambda(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \lambda \ ;$$

allora da (1) otteniamo subito

$$f_\lambda(0,0) = (-1,0) \cdot (\alpha,\beta) = -\alpha \ .$$

2) Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine completa. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è:

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^x \ , \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

poiché l'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda = 0$ fornisce $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$. Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa osserviamo che il coefficiente dell'esponente di e è $\lambda = 1$ e quindi soddisfa l'equazione caratteristica. Dunque l'espressione dell'integrale particolare sarà $y_p(x) = x(k_0 x + k_1)e^x$ dove k_0 e k_1 sono costanti da determinare. A tal fine si calcolano y_p' ed y_p'' e si sostituiscono nell'equazione data ottenendo

$$[k_0 x^2 + (4k_0 + k_1)x + 2k_0 + 2k_1 - k_0 x^2 - (2k_0 + k_1)x - k_1] \ \cancel{e^x} = x \ \cancel{e^x} \ .$$

Ora, applicando il principio di identità dei polinomi si ha $k_0 = \dfrac{1}{2}, \quad k_1 = -1$ da cui

$$y_p(x) = x\left(\frac{x}{2} - 1\right) e^x \ .$$

Integrale generale dell'equazione completa:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_p(x) = \\ &= c_1 + c_2 e^x + x\left(\frac{x}{2} - 1\right) e^x = c_1 + c_2 e^x + \frac{x^2 - 2x}{2} e^x \ , \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

Ora, $0 = \lim_{x \to -\infty} y(x) = c_1$ e $1 = y(0) = c_1 + c_2$, da cui $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$, per cui

$$\bar{y}(x) = e^x + \frac{x^2 - 2x}{2} e^x.$$

Matematica 2 (Chimica) - 27 Giugno 2022

1) Determinare, se esistono, i punti di massimo relativo, di minimo relativo e di sella della funzione f definita dalla legge

$$f(x,y) = 2(x+y)^2 - x^4 - y^4 \ .$$

2) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{x}{y}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy,$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche $x = \cos t$, $y = \sin t$, $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$.

Svolgimento

1) La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è ivi derivabile, quindi gli eventuali punti estremanti sono da cercare solo tra i punti critici. Si ha

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 4(x+y) - 4x^3 = 0 \\ f'_y(x,y) = 4(x+y) - 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x^3 \\ x^3 - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^3 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2} \\ x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \ .$$

$$H(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} -20 & 4 \\ 4 & -20 \end{vmatrix} = 384$$

$$f''_{xx}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f''_{xx}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -20$$

implicano che i punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sono di massimo relativo per f ed il massimo relativo per entrambi è $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 8$.

Per $(0,0)$ si ha invece $H(0,0) = 0$, quindi non si hanno direttamente informazioni. Consideriamo allora le restrizioni di f alle due bisettrici $y = x$ e $y = -x$. Si ha $f(x,-x) = -2x^4 < 0$ sempre, mentre $f(x,x) = 8x^2 - 2x^4$ è positivo almeno in prossimità dell'origine; quindi $(0,0)$ non può essere un punto estremante, dunque è di sella.

2) La curva γ è un arco di circonferenza di raggio 1 e passante per l'origine. Risulta $x'(t) = -\sin t, y'(t) = \cos t$ e quindi sostituendo la parametrizzazione nell'integrale curvilineo di seconda specie si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{x}{y}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{\cos t}{\sin t}(-\sin t) + \sin t \cos t\right] dt = \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (-\cos t + \sin t \cos t) dt = \\
&= \left[-\sin t + \frac{1}{2}\sin^2 t\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}-6}{4}.
\end{aligned}$$

Matematica 2 (Chimica) - 11 Luglio 2022

---

1) Calcolare
$$\iint_D \left[2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right]\, dxdy$$
quando $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\}$.

2) Risolvere l'equazione differenziale
$$y" + y' = 2e^x + 2x + 1.$$

Svolgimento

1) Sia
$$V = \iint_D \left(2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy$$
con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\}$. Calcoliamo l'integrale con le coordinate polari
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$
il cui Jacobiano è $j = \rho$, cosicché l'insieme D viene trasformato in
$$T = \{(\theta,\rho) : 0 \le \theta \le 2\pi\,,\ 0 \le \rho \le 2\}\ .$$
Dalla formula del cambiamento di variabili per gli integrali doppi e dalle formule di riduzione otteniamo
$$V \;=\; \iint_T \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right)\rho\, d\rho d\theta \;=\; \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(2\rho - \frac{\rho^3}{2}\right) d\rho \;=\; 2\pi\left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{8}\right]_0^2 \;=\; 4\pi\ .$$

2) L'equazione caratteristica associata alla omogenea è $t^2+t=0$ che ammette come soluzioni $t = 0, -1$. L'integrale generale della equazione omogenea è
$$y(x) = c_1 + c_2e^{-x}.$$
Cerchiamo ora una soluzione della equazione $y"+y' = 2e^x$. Poiché $t=1$ non è soluzione della equazione caratteristica, una soluzione particolare della equazione completa sarà

della forma $y = ae^x$. Derivando due volte e sostituendo si ottiene $2ae^x = 2e^x$ se e solo se $a = 1$.

Cerchiamo ora una soluzione della equazione $y" + y' = 2x + 1$. Dovrà essere della forma $y = ax^2 + bx + c$. Quindi, derivando due volte e sostituendo:

$$2a + 2ax + b = 2x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2a = 2,\ 2a + b = 1, b = -1.$$

Possiamo supporre $c = 0$. L'integrale generale della equazione completa è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + e^x + x^2 - x.$$

Matematica 2 (Chimica) - 5 Settembre 2022

---

1) Rappresentare nel piano il dominio della funzione:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(x^2+1-y)(x^2+1+y)}}{(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2} + \ln\frac{x+1}{2-x}.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'+x-y=0 \\ y'-x+y=0 \\ x(0)=2,\ y(0)=0. \end{cases}$$

Svolgimento

1) Deve risultare

$$\begin{cases} (x^2+1-y)(x^2+1+y) \geq 0 \\ (x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 \neq 0 \\ \frac{x+1}{2-x} > 0. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$(x^2+1-y)(x^2+1+y) \geq 0 \Longleftrightarrow (x^2+1)^2-y^2 \geq 0 \Longleftrightarrow -1-x^2 \leq y \leq x^2+1;$$

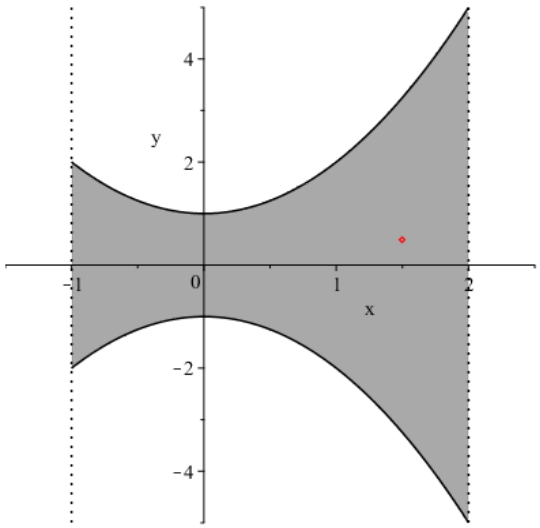
$$(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 \neq 0 \Longleftrightarrow (x,y) \neq (\frac{3}{2},\frac{1}{2});$$

$$\frac{x+1}{2-x} > 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 2.$$

Pertanto otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -1-x^2 \leq y \leq x^2+1; \\ (x,y) \neq (\frac{3}{2},\frac{1}{2}); \\ -1 < x < 2. \end{cases}$$

Il campo di esistenza della funzione f è rappresentato nel piano cartesiano dal seguente insieme colorato in grigio a cui va escluso il punto rosso:



2)

$$\begin{cases} x' + x - y = 0 \\ y' - x + y = 0 \end{cases}$$

è un sistema lineare del primo ordine. Deriviamo la prima equazione

$$x'' + x' - y' = 0 \Longleftrightarrow x'' + x' - x + y = 0 \Longleftrightarrow x'' + x' - x + x' + x = 0.$$

Risolviamo allora $x'' + 2x' = 0$. La sua equazione caratteristica è $\alpha^2 + 2\alpha = 0$ che ammette come soluzioni $\alpha = 0, \alpha = -2$. L'integrale generale della equazione del secondo ordine è

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-2t}.$$

Se la deriviamo otteniamo $x'(t) = -2c_2 e^{-2t}$. Pertanto

$$y(t) = x'(t) + x(t) = -c_2 e^{-2t} + c_1.$$

$$x(0) = c_1 + c_2 = 1 \qquad y(0) = -c_2 + c_1 = 0$$

da cui otteniamo $c_1 = c_2 = 1$ e quindi la soluzione cercata è

$$x(t) = 1 + e^{-2t} \quad y(t) = 1 - e^{-2t}.$$

Matematica 2 (Chimica) - 9 Gennaio 2023

Motivare tutte le risposte

1) Stabilire la natura dei punti critici della funzione $f(x,y) = (y-x)(x^2+y^2-1)$.

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 13 \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 3. \end{cases}$$

Svolgimento

1) La funzione è di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^2$, quindi gli eventuali punti di massimo e di minimo devono essere soluzione del sistema $\nabla f = (0,0)$. Determiniamo l'insieme dei punti critici:

$$\begin{cases} f_x(x,y) \equiv -(x^2+y^2-1) + 2x(y-x) = 0 \\ f_y(x,y) \equiv x^2+y^2-1+2y(y-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 = 2x(y-x) \\ x^2+y^2-1 = -2y(y-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 = 2x(y-x) \\ 2x(y-x) = -2y(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 = 2x(y-x) \\ x(y-x)+y(y-x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 = 2x(y-x) \\ (x+y)(y-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 = 2x(y-x) \\ y = x \vee y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1 = 0 \\ y = x \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2-1 = -4x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \vee (x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

La matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+2y & -2y+2x \\ 2x-2y & 6y-2x \end{pmatrix},$$

per cui:

$$\det H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-8 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ è punto di sella;}$$

$$\det H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-8 \qquad \Rightarrow \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ è punto di sella;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det H_f\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=8 \\ f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{8}{\sqrt{6}}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ è punto di massimo relativo;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=8 \\ f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{8}{\sqrt{6}}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

2) L'integrale generale della equazione differenziale (del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, completa) è

$$y(x)=1+e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x).$$

(L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $\alpha^2-4\alpha+13=0$....)
La soluzione particolare del problema di Cauchy è

$$y^*(x)=1+e^{2x}\sin 3x.$$

Matematica 2 (Chimica) - 24 Gennaio 2023

Motivare tutte le risposte

1) Data la curva γ, parametrizzata da $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $-2\pi \le t \le 2\pi$, determinare la lunghezza di γ e la retta tangente alla curva nel punto corrispondente a $t = 0$.

2) Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t+1} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Allora $y(1)$ è uguale a :

□ e; □ 2; □ $\sqrt{2}$; □ $\sqrt{e}$.

Cenno di svolgimento

1) La funzione $r : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è derivabile, con derivata continua e

$$r'(t) = \left(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\cos t + \sin t)\right).$$

Risulta allora

$$ds = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\cos t + \sin t)^2}dt = \sqrt{2}e^t dt$$

e dunque

$$L(\gamma) = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}\left[e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right].$$

Per $t = 0$ risulta $r(0) = (1, 0)$ e $r'(0) = (1, 1)$. L'equazione parametrica della tangente cercata è

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = t. \end{cases}$$

2) L'equazione differenziale è a variabili separabili

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t+1} \quad \Rightarrow \log|y| = \log k|t+1| \quad k > 0.$$

Siccome il dato iniziale è $y(0) = 1$ scelgo $y > 0$. Quindi $y = |t + 1|$ e $y(1) = 2$.

Matematica 2 (Chimica) - 6 febbraio 2023

Motivare tutte le risposte

1) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = \arctan(xy)$ sulla curva γ determinata dalla equazione $x^2 + y^2 = 1$.

2) Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Cenno di svolgimento

1) La curva γ può essere parametrizzata nel seguente modo

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Sia $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \arctan(\cos t \sin t).$$

La funzione $g \in C^1([0, 2\pi])$ è definita in un compatto e per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti. Risulta

$$\begin{aligned} g'(t) \quad &= \quad \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\sin^2 t \cos^2 t + 1} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi < t < \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_t g(t) &= g(\frac{1}{4}\pi) = \arctan(\frac{1}{2}) \\ \min_t g(t) &= g(\frac{3}{4}\pi) = -\arctan(\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

2) Si tratta di una serie a segni alterni.

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + x^2} = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \\ &\frac{1}{n + x^2} \geq \frac{1}{n + 1 + x^2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pertanto la serie converge in $\mathbb{R}$ per il criterio di Leibnitz.

Matematica 2 (Chimica) - 3 aprile 2023

Motivare tutte le risposte

1) Data La funzione $f(x,y) = e^{y^2-x^2}$ determinare i suoi punti di massimo e di minimo nel dominio. Determinare massimi e minimi assoluti nel triangolo di vertici $(0,0),(1,0),(0,1)$.

2) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^x + 11e^{2x} \\ y(0) = \dfrac{3}{2}; \quad y'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Cenno di svolgimento

1) La funzione risulta di classe C^2 in tutto il suo dominio $\mathbb{R}^2$. Pertanto gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo saranno punti critici della funzione. Risulta $\nabla f(x,y) = (-2xe^{y^2-x^2}, 2ye^{y^2-x^2}) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$. Risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (-2+4x^2)e^{y^2-x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= -4xye^{y^2-x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= (2+4y^2)e^{y^2-x^2} \end{aligned}$$

e dunque

$$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Dunque l'origine è un punto sella e la funzione non ha punti di massimo o di minimo relativo nel suo dominio.

Poiché il triangolo T è un compatto e la funzione $f \in C(T)$ il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di punti di massimo e di minimo assoluti che non si potranno trovare in T° e quindi si troveranno nella frontiera di T.

$$Fr(T) = \{(x,0),\ 0 \le x \le 1\} \cup \{(0,y),\ 0 \le y \le 1\} \cup \{(x, 1-x),\ 0 \le x \le 1\}.$$

Risulta

- $f(x,0) = e^{-x^2}$, decrescente in $[0,1]$ quindi $\max_{x\in[0,1]} f(x,0) = f(0,0) = 1$, $\min_{x\in[0,1]} f(x,0) = f(1,0) = e^{-1}$.
- $f(0,y) = e^{y^2}$, crescente in $[0,1]$ quindi $\max_{x\in[0,1]} f(0,y) = f(0,1) = e$, $\min_{x\in[0,1]} f(0,y) = f(0,0) = 1$.
- $f(x,1-x) = e^{1-2x}$, decrescente in $[0,1]$ quindi $\max_{x\in[0,1]} f(x,1-x) = f(0,1) = e$, $\min_{x\in[0,1]} f(x,1-x) = f(1,0) = e^{-1}$.

Pertanto il punto di massimo assoluto è $(0,1)$, quello di minimo assoluto $(1,0)$.

2) $y''-5y'+6y = e^x+11e^{2x}$ è una equazione differenziale lineare del secondo ordine completa. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$ che ammette come soluzioni $\alpha = 2$ e $\alpha = 3$. L'integrale generale della equazione omogenea associata è $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare di $y'' - 5y' + 6y = e^x$ della forma $y(x) = ae^x = y'(x) = y''(x)$. Sostituendo nella equazione differenziale otteniamo $a = \dfrac{1}{2}$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare di $y'' - 5y' + 6y = +11e^{2x}$. Siccome $\alpha = 2$ è soluzione della equazione caratteristica la soluzione cercata sarà della forma $y(x) = bxe^{2x}$. Derivandola due volte e sostituendola nella equazione differenziale si ottiene $b = -11$.

L'integrale generale della equazione completa è

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{2}e^x - 11xe^{2x}.$$

Imponendo i dati iniziali si ottiene

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dfrac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ 2c_1 + 3c_2 + \dfrac{1}{2} - 11 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -8 \\ c_2 = 9 \end{cases}$$

prova scritta Matematica 2 (Chimica) **12 Giugno 2023**

BES/DSA ☐

---

1) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 e^n}{n!}.$$

2) Calcolare

$$\iint_E x dx dy$$

quando $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq \sqrt{1 + x^2}\}$.

3) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Cenni di svolgimento

1) La serie è a termini positivi e quindi non può essere indeterminata. Se applichiamo il criterio del rapporto otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n^2} \cdot e = 0 < 1.$$

Dunque la serie è convergente

2) L'insieme E è y-semplice, pertanto

$$\begin{aligned} \iint_E x \, dx dy &= \int_1^2 x \, dx \int_0^{\sqrt{1+x^2}} dy = \int_1^2 x\sqrt{1 + x^2} \, dx = (\text{ sost. } 1 + x^2 = w) = \\ &= \frac{1}{2} \int_2^5 \sqrt{w} \, dw = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[w^{3/2}\right]_2^5 = \frac{1}{3} \cdot \left[5^{3/2} - 2^{3/2}\right]. \end{aligned}$$

3) L'equazione differenziale è lineare, del secondo ordine ed omogenea. La sua equazione caratteristica è $z^2 + z - 2 = 0$ che ammette soluzioni $z_1 = -2$ e $z_2 = 1$. L'integrale generale della equazione differenziale è

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x.$$

la sua derivata è $y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$.

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

La soluzione cercata è $y(x) = e^x$.

prova scritta Matematica 2 (Chimica) 26 Giugno 2023

BES/DSA ☐

---

1) Una persona giunge al pronto soccorso al tempo $t = 0$ per un attacco di asma, senza aver preso alcuna medicina. Gli viene immediatamente somministrato per endovena il solfato di magnesio: 1.2 grammi per ora. Sia $y(t)$ la quantità di magnesio presente nel corpo dopo t ore. Scrivere l'equazione differenziale che esprime la variazione di solfato di magnesio nel corpo $y'(t)$ sapendo che il corpo smaltisce il solfato di magnesio in modo proporzionale alla quantità presente nel corpo e che la costante di propozionalità è 0.133. Scrivere il dato iniziale $y(0)$.

2) Calcolare $y(t)$ relativa al punto 1). Quante ore sono necessarie per accumulare nel corpo 8 grammi di solfato di magnesio?

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{8}{y} - xy$$

e determinarne gli eventuali punto di massimo e di minimo relativo.

Cenni di svolgimento

1) Indichiamo con $y(t)$ la quantità di solfato di magnesio presente nell'organismo del paziente. All'inizio $y(0) = 0$. Poi ogni ora il paziente riceve una quantità di solfato di magnesio pari a $+1.2g$ e ne elimina una quantità pari a $-0.133y(t)$. Quindi la variazione di solfato di magnesio all'ora è pari a

$$\frac{\Delta y}{1h} = 1.2 - 0.133y(t).$$

Se supponiamo che y sia derivabile, passando al limite per $t \to 0$ otteniamo

$$y'(t) = 1.2 - 0.133y(t), \quad y(0) = 0.$$

2) Questa equazione differenziale può essere trattata sia come a variabili separabili che come lineare del primo ordine. Se la vediamo come lineare del primo ordine allora la sua equazione caratteristica è $z + 0.133 = 0$ e quindi l'integrale della omogenea è

$$y(t) = c_1 e^{-0.133t}$$

Per determinare una soluzione della equazione completa cerchiamo una costante $y = a$, in questo caso $a = 0.923$. Quindi l'integrale generale della equazione completa è

$$y(t) = c_1 e^{-0.133t} + 0.923.$$

Per determinare la costante c_1 osserviamo che $y(0) = 0$, quindi $c_1 = -0.923$. La soluzione cercata è

$$y(t) = -9.023 e^{-0.133t} + 0.923.$$

Cerchiamo ora t in modo che $y(t) = 8$.

$$e^{-0.133t} = -\frac{8 - 9.023}{9.023} = 0,113 \quad \Longleftrightarrow \quad -0.133t = \ln 0.113 = -2.017 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 15.16 \,\text{ore}.$$

3) L'insieme di definizione della funzione è

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \neq 0, y \neq 0\}.$$

Siccome $f \in C^2(D)$ e D è un insieme aperto, calcoliamo il suo gradiente e applichiamo il teorema di Fermat.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} - y = 0 \\ \\ -\dfrac{8}{y^2} - x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{x^2} \\ \\ -x(8x^3 + 1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{x^2} \\ \\ (8x^3 + 1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{4} \\ \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Calcoliamo ora le derivate seconde di f:
$f''_{xx}(x, y) = \dfrac{2}{x^3}$, $\quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -1$, $\quad f''_{yy}(x, y) = \dfrac{16}{y^3}$. Allora

$$H(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = \begin{vmatrix} -16 & -1 \\ -1 & -\dfrac{1}{4} \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad f''_{xx}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) < 0$$

dunque il punto è di massimo relativo e non ci sono altri punti da studiare.

prova scritta Matematica 2 (Chimica) 10 Luglio 2023

BES/DSA ☐

Motivare tutte le risposte

1) Determinare l'integrale generale della equazione differenziale $y'(x) + 8y(x) = 6e^{-2x}$.

2) Sia $f(x, y) = x^2 \cos y$. Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1, 2\pi)$ lungo la direzione $v = (3, 4)$.

3) Sia $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\ y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$. Disegnare anche l'insieme E e calcolare $\displaystyle\int_E (x + y)\, dxdy$.

Cenni di svolgimento

1) Si tratta di una equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti completa. L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $z+8 = 0$ e quindi l'integrale generale della equazione omogenea è $y(x) = ce^{-8x}$. Cerchiamo ora una soluzione particolre della forma $v(x) = ae^{-2x}$, $v'(x) = -2ae^{-2x}$. Dunque $-2ae^{-2x} + 8ae^{-2x} = 6e^{-2x}$ se e solo se $a = 1$ quindi l'integrale generale della equazione completa è

$$y(x) = ce^{-8x} + e^{-2x}.$$

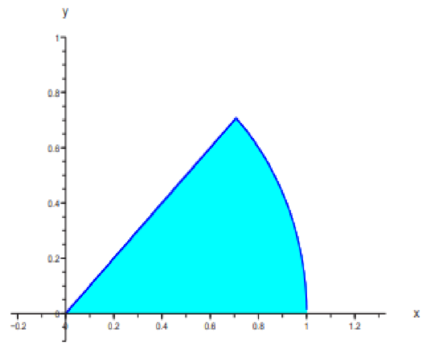
2) La funzione f ammette derivate parziali, il suo gradiente è $\nabla f = (2x \cos y, -x^2 \sin y)$. Poiché f e le sue derivate parziali sono funzioni continue in tutto $\mathbb{R}^2$ allora f è differenziabile e la derivata direzionale si può calcolare nel seguente modo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2\pi) = \nabla f(1, 2\pi) \bullet \nu$$

dove $\bullet$ indica il prodotto scalare e ν è il versore individuato da v. Risulta $\nu = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e pertanto

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2\pi) = \Big(2, 0\Big) \bullet \Big(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\Big) = \frac{6}{5}.$$

3) L'insieme E è rappresentato in figura



$$\begin{aligned}
\int_E (x+y)\,dxdy &= \int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} \Big[\frac{x^2}{2} + xy\Big]_{x=y}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy = \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \Big(\frac{1-y^2}{2} + y\sqrt{1-y^2} - \frac{3}{2}y^2\Big) dy = \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \Big(\frac{1}{2} + y\sqrt{1-y^2} - 2y^2\Big) dy = \\
&= \Big[\frac{y}{2} - \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{3}(1-y^2)^{3/2}\Big]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

prova scritta Matematica 2 (Chimica) 5 Settembre 2023

---

1) Trovare massimi e minimi assoluti, e i relativi punti di estremo, della funzione $f : E \to \mathbb{R}^2$ nell'insieme E, ove $f(x, y) = 4 - 2y + \dfrac{x^2}{3}$ quando $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{8} - 8 \leq y \leq 0\big\}$.

2) Dire se e^{t^2}, $t \in \mathbb{R}$ è soluzione della equazione differenziale $y'' = (2 + 4t^2)y$.

3) Sia $\mathcal{C}$una curva generalmente regolare parametrizzata da $x^2 + y^2 = 1,\ x \leq 0$; e da $y = 1,\ 0 \leq x \leq 1$. Calcolare

$$\int_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

nel verso che va dal punto $(0, -1)$ al punto $(1, 1)$.

Cenni di svolgimento

1) La funzione f è almeno di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. L'insieme E è costituito dai punti che hanno ordinata negativa e si trovano al di sopra della parabola $\dfrac{x^2}{8} - 8$. Iniziamo a trovarne i punti critici in E°. Poiché $f'_y(x, y) = -2 \neq 0$ i valori estremi in E (compatto), che vengono assunti per il teorema di Weierstrass, devono appartenere alla frontiera di E ∂E. ∂E è costituita dalle due curve

$$\gamma_1 := \big\{(x, 0) \quad | \quad x \in [-8, 8]\,\big\}, \qquad \gamma_2 := \big\{(x, \frac{x^2}{8} - 8) \quad | \quad x \in [-8, 8]\,\big\}.$$

Risulta $f_1(x) = f(x, 0) = 4 + \dfrac{x^2}{3}$ che ha un minimo per $x = 0$ $(f_1(0) = 4)$ e due punti di massimo per $x = \pm 8$, $(f_1(\pm 8) = \dfrac{76}{3})$.

Su γ_2 invece $f_2(x) = f(x, \dfrac{x^2}{8} - 8) = 20 + \dfrac{x^2}{12}$. Ci sarà ovviamente un minimo per $x = 0$ $(f_2(0) = 20)$ e due massimi per $x = \pm 8$ (qui il valore è lo stesso di f_1).

Risulterà allora, per il teorema di Weierstrass, $(0, 0)$ punto di minimo assoluto $f(0, 0) = 4$ e $(\pm 8, 0)$ punti di massimo assoluto $f(\pm 8, 0) = \dfrac{76}{3}$.

2) Sia $y(t) = e^{t^2}$. Poiché $y \in C^2(\mathbb{R})$ allora

$$y'(t) = 2te^{t^2} \qquad y''(t) = (2 + 4t^2)e^{t^2}.$$

Sostituendo si ottiene una identità, quindi $y = e^{t^2}$ è soluzione della equazione differenziale data (del secondo ordine a variabili separabili).

3) La prima parte della curva è parametrizzata da $r_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $\dfrac{3\pi}{2} \geq t \geq \dfrac{\pi}{2}$ mentre la seconda è parametrizzata da $r_2(t) = (t, 1)$, $0 \leq t \leq 1$. Entrambe le rappresentazioni sono buone, quindi $\mathcal{C}$ è generalmente regolare. Risulta

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy &= \int_{3\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 + \cos^2 t)\, dt - \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \\
&= -\pi - \big[\arctan t\big]_0^1 = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5}{4}\pi.
\end{aligned}$$

prova scritta Matematica 2 (Chimica) 8 Gennaio 2024

1) Data la funzione $f(x;y) = \log(1+|xy|)$, stabilire dove risulta derivabile nel suo dominio e calcolarne le derivate parziali. Determinarne, se esiste, la derivata lungo la direzione $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ nel punto $(0,0)$.

2) Provare che la curva $\mathcal{C}$ parametrizzata da $r(t) := (e^t; e^{2t})$, $0 \le t \le 1$ è regolare.

3) Dato il campo vettoriale $F(x;y) := \Big(2x\log y, \dfrac{x^2}{y} + 2y\log y\Big)$, stabilire se il campo è conservativo sul suo dominio ed in caso affermativo determinarne un potenziale. Calcolare poi il lavoro compiuto dal campo F lungo la curva $\mathcal{C}$ del punto 2).

Cenni di svolgimento

1) La funzione data risulta definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$ essendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \log(1+xy) & xy \ge 0 \\ \log(1-xy) & xy < 0 \end{cases}$$

Possiamo dire che la funzione risulta derivabile parzialmente in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x_0y_0 \neq 0$ con

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{cases} \Big(\dfrac{y_0}{1+x_0y_0}, \dfrac{x_0}{1+x_0y_0}\Big) & x_0y_0 > 0 \\ \\ \Big(-\dfrac{y_0}{1+x_0y_0}, -\dfrac{x_0}{1+x_0y_0}\Big) & x_0y_0 < 0. \end{cases}$$

Rimane da discutere la derivabilità nei punti degli assi cartesiani. Nell'origine del piano si ha che la funzione risulta derivabile parzialmente infatti, essendo $f(x,0) = f(0,y) = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$; pertanto $\nabla f(0,0) = (0,0)$ La funzione non risulta invece derivabile parzialmente nei restanti punti degli assi. Infatti, nel punto $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$ avremo che la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad x con derivata parziale nulla, mentre non risulta derivabile parzialmente rispetto ad y essendo

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x_0,h) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\log(1+|x_0h|)}{h} = |x_0| \lim_{h\to 0^\pm} \frac{|h|}{h} = \pm|x_0|.$$

Analogalmente, nel punto $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ avremo che la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad y derivata nulla, mentre non risulta derivabile parzialmente rispetto ad x.

La funzione ammette derivata lungo la direzione (versore) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ nel punto $(0,0)$ in quanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+\frac{h^2}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{2} = 0.$$

2) La parametrizzazione $r \in C^1([0,1])$, c'è iniettività (dunque la curva è semplice), inoltre $r'(t) = (e^t, 2e^{2t}) \neq (0,0)$. Quindi la curva è regolare.

3) Il campo è defi

nito e di classe C^1 nel suo dominio $A = \{x; y) : y > 0\}$ ove risulta irrotazionale essendo $X'_y = \dfrac{2x}{y} = Y'_x$. Poiché la regione A risulta semplicemente connessa, ne deduciamo che il campo è conservativo in A. Per determinarne un potenziale $U(x,y)$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni $U'_x = 2x\log y$ e $U'_y = \dfrac{x^2}{y} + 2y\log y$. Dalla prima delle due condizioni abbiamo che $U(x;y) = \int 2x \log y dx = x^2 \log y + c(y)$; e dalla seconda $\dfrac{x^2}{y} + 2y\log y = U'_y = \dfrac{x^2}{y} + c'(y)$. Dunque $c(y) = \int 2y \log y dy = y^2 \log y - \dfrac{y^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$U(x,y) = x^2 \log y + y^2 \log y - \frac{y^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Poiché F è campo conservativo in A e la curva $\mathcal{C}$ ha sostegno contenuto in A, allora

$$L = U(r(1)) - U(r(0)) = \frac{3}{4}e^4 + 2e^2 - \frac{1}{2}.$$

prova scritta Matematica 2 (Chimica) 22 Gennaio 2024

---

1) Determinare il volume del solido contenuto nel primo ottante e delimitato dal cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e dal piano $z = y$.

2) Calcolare l'integrale curvilineo $\int_C (x^2 - xy)dx + (xy - y^2)dy$ dove C è la frontiera del triangolo di vertici $(-1, 0), 1, (0, 1)$, $(1, 0)$ percorsa in verso antiorario.

3) Trovare le soluzioni del problema di Cauchy $y' = (y - 1)\cos x,\ y(0) = -1$.

Cenni di svolgimento

1) Si tratta di calcolare l'integrale doppio della funzione $z(x, y) = y$ definita nell'insieme $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x^2 + y^2 \leq 4\}$. L'insieme D in coordinate polari è dato da $[0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}$ e pertanto

$$\begin{aligned} V &= \iint_D y dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \sin t \, dr dt = \Big(\int_0^{\pi/2} \sin t \, dt \Big) \cdot \Big(\int_0^2 r^2 \, dr \Big) = \\ &= \Big[\frac{r^3}{3} \Big]_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

2) Il triangolo T è un dominio regolare rispetto all'asse y: $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y - 1 \leq x \leq 1 - y\}$. La frontiera di T è proprio la curva C percorsa in verso antiorario, pertanto per le formule di Green:

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 - xy)dx + (xy - y^2)dy &= \iint_T \Big[-\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - xy) + \frac{\partial}{\partial x}(xy - y^2) \Big] dx dy = \\ &= \iint_T (x + y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} (x + y) dx = \\ &= \int_0^1 (2y - 2y^2) dy = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3) Si tratta di una equazione a variabili separabili. Supponiamo che $y < 1$ (visto il dato iniziale). Allora

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{y-1} = \cos x dx \qquad & \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y-1} = \int \cos x dx \\
& \Longrightarrow \log(1-y) = \sin x + c \quad \Longrightarrow \quad 1 - y = e^{\sin x + c} \\
& \Longrightarrow y = 1 - e^{\sin x} \cdot e^c = 1 - k e^{\sin x}, \quad k > 0.
\end{aligned}
$$

Imponendo il dato iniziale si ottiene $k = 2$.

prova scritta Matematica 2 (Chimica) 5 Febbraio 2024

---

1) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva C parametrizzata da $r(t) = (\frac{t^3}{3}, t^2), \quad t \in [0,1]$.

2) Data la forma differenziale lineare $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ studiarne l'esattezza e, in caso affermativo, determinarne le primitive.

3) Data $f(x,y) = (x+y)|x+y|$ studiare la derivabilità parziale e la differenziabilità nel punto $(0,0)$, calcolare la derivabilità direzionale in $(0,0)$ nella direzione del versore che forma un angolo di $30°$ con l'asse positivo delle x.

Cenni di svolgimento

1) Risulta $r \in C^1([0,1])$ e $r'(t) = (t^2, 2t)$. Perlanto

$$\begin{aligned} L_C &= \int_0^1 \sqrt{t^4+4t^2}\,dt = \int_0^1 t\sqrt{t^2+4}\,dt = \qquad (t^2+4=w) \\ &= \frac{1}{2}\int_1^5 w^{1/2}\,dw = \frac{1}{2}\Big[\frac{w^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big]_1^5 = \frac{1}{3}\Big(5^{3/2}-1\Big). \end{aligned}$$

2) La forma differenziale lineare ω è definita e di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Non si può usare nessuna delle condizioni sufficienti perché la regione di definizione ha un buco e le componenti sono positivamente omogenee di grado -1. Procediamo allora direttamente. Se ammette una primitiva U allora

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int \frac{x}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + g(y) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= \frac{y}{x^2+y^2} + g^y = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \Longleftrightarrow g'(y) = 0. \end{aligned}$$

Pertanto ω è esatta e $U(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

3) Risulta $f(0,0)=0$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{h|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}|h|=0\\
\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} &= \lim_{k\to 0}\frac{k|k|-0}{k}=\lim_{k\to 0}|k|=0
\end{aligned}$$

quindi f è derivabile parzialmente nell'origine. Allora, per studiare la differenziabilità nell'origine determiniamo il comportamento di $\varepsilon(x,y)$ quando $(x,y)\to(0,0)$, dove:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0)+xf'_x(0,0)+yf'_y(0,0)+\sqrt{x^2+y^2}\cdot\varepsilon(x,y)\\
\varepsilon(x,y) &= \frac{(x+y)|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{(x+y)|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| &= \lim_{r\to 0}\frac{r^2|\cos t+\sin t|^2}{r}\le\lim_{r\to 0}4r=0
\end{aligned}$$

uniformemente in $t\in[0,2\pi]$, dunque f è differenziabile nell'origine. Dalla differenziabilità segue che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=0.$$

prova scritta Matematica 2 (Chimica) — 3 Aprile 2024

1) Risolvere l'equazione differenziale $y' + (\sin x)y = \sin x$.

2) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4)$.

3) Sia D l'insieme contenuto nel semipiano $y \geq 0$ delimitato dal basso da $y = |x|$ e dall'alto da $y = \sqrt{1 - x^2}$. Determinare la massa di D sapendo che la sua densità è $\delta(x, y) = e^{x^2+y^2}$.

Cenni di svolgimento

1) Si tratta di una equazione lineare del primo ordine completa. Applichiamo direttamente la formula risolutiva

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \sin x dx}\Big\{\int \sin x e^{\int \sin x dx} dx + c\Big\} = e^{\cos x}\Big\{\int e^{-\cos x}\sin x dx + c\Big\} = \\ &= e^{\cos x}\Big(e^{-\cos x} + c\Big) = 1 + ce^{\cos x}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) La funzione $f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4)$ è di classe almeno $C^2(\mathbb{R}^2)$, quindi gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo devono annullare il gradiente di f. Risulta $\nabla f(x, y) = (4x - 4x^3, 4y - 4y^3) = 0 \iff$

$$\begin{cases} 4x(1 - x^2) = 0 \\ 4y(1 - y^2) = 0 \end{cases} \iff (0, 0),\ (0, \pm 1),\ (\pm 1, 0),\ (\pm 1, \pm 1)$$

Risulta

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 4 - 12x^2 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \det H(0, 0) &= 16 > 0,\ f''(0, 0) = 4 > 0, \quad (0, 0) \quad \text{minimo relativo} \\ \det H(0, \pm 1) &= \det H(\pm 1, 0) = -32 < 0, \quad (0, \pm 1),\ (\pm 1, 0) \quad \text{4 punti sella} \\ \det H(\pm 1, \pm 1) &= 64 > 0,\ f''(\pm 1, \pm 1) = -8 < 0 \quad \text{4 punti di massimo relativo.} \end{aligned}$$

3) Scriviamo direttamente D in coordinate polari: $D = [0,1] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Risulta allora

$$\begin{aligned} m(D) &= \iint_D e^{x^2+y^2} dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dt \int_0^1 re^{r^2} dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^{-w} \frac{dw}{2} = \\ &= \frac{\pi}{4} \Big[-e^{-w} \Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} \Big(1 - e^{-1} \Big) \end{aligned}$$