Analisi Matematica II - I esonero 21 Nov. 2017 - Compito A

1) **(Gli Studenti di Mecc. devono risolvere entrambi gli esercizi, quelli di Civ. solo 1.a)**

1.a) Data la funzione $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinarne (se esistono):

- i punti estremanti;
- il massimo ed il minimo assoluti sul segmento $S = \overline{AB}$, ove $A = (1,0)$ e $B = (0,1)$;
- l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,1)$;
- tutte le derivate direzionali nel punto $(1,1)$.

1.b) Studiare i massimi e i minimi vincolati della funzione $f(x,y) = xy$ sotto in vincolo $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$.

2) **(solo per gli studenti di Civile)** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y}{x} + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

3) Dopo aver disegnato l'insieme D dato dalla parte di piano comune ai due cerchi di centri $(1,0)$ e $(0,1)$, entrambi di raggio 1, calcolare

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy.$$

Svolgimento

1) Solgimento dei due esercizi

1.a) La funzione è data da un polinomio in due variabili e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

- allora i punti estremanti, se esistono, devono soddisfare il teorema di Fermat

$$\begin{cases} f_x(x,y) \equiv 3x^2 + y = 0 \\ f_y(x,y) \equiv -3y^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ x(-27x^3 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1/3 \\ y = -1/3 \end{cases}$$

Usiamo la condizione sufficiente data dall'hessiano per studiare la natura dei punti critici.

$$det\, H_f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) = 6x & f_{xy}(x,y) = 1 \\ f_{yx}(x,y) = 1 & f_{yy}(x,y) = -6y \end{vmatrix}$$

da cui
$det\, H_f(0,0) = -1 < 0$, quindi il punto $(0,0)$ è di sella per la funzione;
$det\, H_f(1/3,-1/3) = 3 > 0$ e $f_{xx}(1/3,-1/3) = 2 > 0$, quindi il punto $(1/3,-1/3)$ è di minimo relativo per f.

- Il segmento è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$, quindi è compatto; la funzione è continua su $\mathbb{R}^2$ e dunque anche su S, pertanto si può applicare il teorema di Weierstrass ed affermare che su S la funzione ammette massimo e minimo assoluti. Abbiamo: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x,\ 0 \leq x \leq 1\}$, da cui

  $$g(x) := f(x, 1-x) = x^3 - (1-x)^3 + x(1-x) = 2x^3 - 4x^2 + 4x - 1,\ x \in [0,1].$$

  Allora $g'(x) = 6x^2 - 8x + 4$, che è sempre positiva in $[0, 1]$; ne segue che $x = 0$ è punto di minimo assoluto per g, mentre $x = 1$ è punto di massimo assoluto per g; dunque $(0, 1)$ è punto di minimo assoluto per f su S e $(1, 0)$ è punto di massimo assoluto per f su S.
- Come abbiamo detto prima, la funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, pertanto è differenziabile e quindi il grafico di f ammette piano tangente in ogni punto. L'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1, 1)$ è

  $$z \quad = \quad f(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot (x-1, y-1) \equiv 1 + (4, -2) \cdot (x-1, y-1)$$

  ovvero $z = 4x - 2y - 1$.
- Essendo il versore generico del piano dato da $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]$ e la funzione differenziabile, per il teorema del gradiente risulta:

  $$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) \equiv (4,-2) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = 4\cos\theta - 2\sin\theta,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

1.b) La curva $x^2+y^2+xy-1 = 0$ è una ellisse reale e pertanto è un insieme compatto, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi la funzione, per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti; per il loro calcolo utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e poniamo

$$F(x, y, a) = xy + a(x^2 + y^2 + xy - 1).$$

Il vincolo risulta di classe almeno C^1 ed il suo gradiente si annulla solo nell'origine che non appartiene al vincolo. Ne risulta che i punti di massimo e di minimo vincolato devono annullare il gradiente di F.

$$\begin{cases} y + a(2x + y) = 0 \\ x + a(2y + x) = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si può dedurre che $a \neq 0$ altrimenti dovrebbe risultare $(x, y) = (0, 0)$ che non è soluzione della terza equazione. Risulta

$$\nabla F = (0,0,0) \iff \begin{cases} y(1+a) + 2ax = 0 \\ x(1+a) + 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y(1+a) + 2ax = 0 \\ y = \pm x \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = x \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -x \\ x^2 = 1 \end{cases} \iff \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), (1,-1), (-1,1).$$

Risulta $f(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{3}$, mentre $f(1, -1) = f(-1, 1) = -1$. I primi due punti sono pertanto di massimo assoluto vincolato per f, mentre i rimanenti due sono di minimo assoluto vincolato.

2) L'equazione differenziale $y'(x) = \dfrac{y}{x} + y^2$ è del tipo di Bernoulli con $s = 2$; visto il dato iniziale supponiamo che $x > 0$ e trasformiamo l'equazione in una lineare utilizzando la sostituzione $y^{-1} = z$. Risulta allora

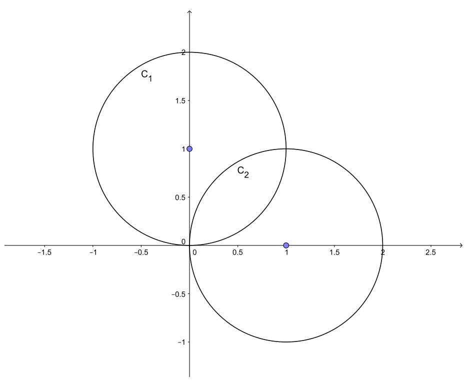
$$y'(x) = \frac{y}{x} + y^2 \qquad y^{-2}y' = \frac{y^{-1}}{x} + 1 \qquad z = y^{-1}$$
$$z' = -\frac{z}{x} - 1 \qquad z(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx}\left\{-\int e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + c\right\}$$
$$z(x) = \frac{1}{x}\left\{-\int xdx + c\right\} \qquad z(x) = \frac{2c - x^2}{2x} \qquad y(x) = \frac{2x}{2c - x^2}$$

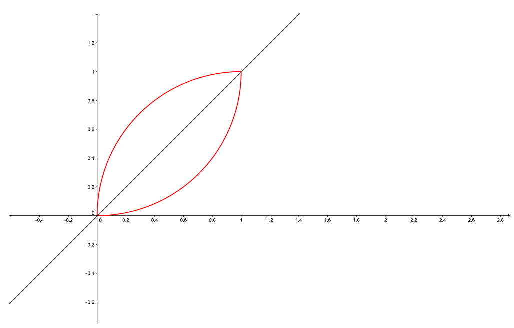
Osserviamo che la y non è definita su tutto $\mathbb{R}^+$, ma il suo dominio dipende dal parametro c. Imponiamo ora la condizione iniziale e troviamo $c = \dfrac{3}{2}$ e quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{2x}{3 - x^2}, \qquad x \in]0, \sqrt{3}[.$$

3) Le due circonferenze che delimitano l'insieme D hanno equazioni cartesiane

$$C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2y = 0;$$
$$C_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$





Osserviamo che l'insieme è simmetrico rispetto alla retta $y = x$; poiché anche la funzione è simmetrica rispetto allla stessa retta (essendo $f(x, y) = f(y, x)$), si ha

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = 2 \iint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$$

ove (senza restrizione di generalità) D_1 è la parte di D al di sopra della retta. Risolviamo l'integrale passando a coordinate polari con polo nell'origine degli assi cartesiani $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$; $j(\theta, \rho) = \rho$. In tal caso la circonferenza C_2 che delimita D_1 dall'alto si riscrive

$$(\rho\cos\theta - 1)^2 + \rho^2\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \boxed{\rho = 2\cos\theta};$$

allora l'insieme D_1 viene trasformato nell'insieme $\tilde{D}_1 = \{(\theta, \rho) : \pi/4 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 2\cos\theta\}$

ed otteniamo

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy &= 2\iint_{\tilde{D}_1} \rho^2 d\theta d\rho = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho\right)d\theta = \\
&= \frac{2}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\rho^3\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{16}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta = \\
&= \frac{16}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos\theta - \cos\theta\sin^2\theta)d\theta = \frac{16}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \\
&= \frac{16}{9}\left(2-\frac{5}{4}\sqrt{2}\right) = \frac{32-20\sqrt{2}}{9}.
\end{aligned}$$

Analisi Matematica II - I esonero 21 Nov. 2017 - Compito B

---

1) (Gli Studenti di Mecc. devono risolvere entrambi gli esercizi, quelli di Civ. solo 1.a)

1.a) Data la funzione $f(x,y) = x^3 - y^3 - xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinarne (se esistono):

- i punti estremanti;
- il massimo ed il minimo assoluti sul segmento $S = \overline{AB}$, ove $A = (1,0)$ e $B = (0,1)$;
- l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,1)$;
- tutte le derivate direzionali nel punto $(1,1)$.

1.b) Studiare i massimi e i minimi vincolati della funzione $f(x,y) = xy$ sotto in vincolo $1 - x^2 - y^2 - xy = 0$.

2) (solo per gli studenti di Civile) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y}{x} + 2y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

3) Dopo aver disegnato l'insieme D dato dalla parte di piano comune ai due cerchi di centri $(1,0)$ e $(0,1)$, entrambi di raggio 1, calcolare

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Svolgimento

1) 1.a) La funzione è data da un polinomio in due variabili e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

- Allora i punti estremanti, se esistono, devono soddisfare il teorema di Fermat

$$\begin{cases} f_x(x,y) \equiv 3x^2 - y = 0 \\ f_y(x,y) \equiv -3y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ x(-27x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

Cioè $\{(0,0), (-1/3, 1/3)\}$. Usiamo la condizione sufficiente deta dall'hessiano per studiare la natura dei punti critici. Risulta

$$det\, H_f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) = 6x & f_{xy}(x,y) = -1 \\ f_{yx}(x,y) = -1 & f_{yy}(x,y) = -6y \end{vmatrix}$$

e dunque
$det\, H_f(0,0) = -1 < 0$, quindi il punto $(0,0)$ è di sella per la funzione;
$det\, H_f(-1/3, 1/3) = 3 > 0$ e $f_{xx}(-1/3, 1/3) = -2 < 0$, quindi il punto $(-1/3, 1/3)$ è di massimo relativo per f.

- Il segmento è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$, quindi è compatto; la funzione è continua su $\mathbb{R}^2$ e dunque anche su S, pertanto si può applicare il teorema di Weierstrass ed affermare che su S la funzione ammette massimo e minimo assoluti.
  Abbiamo: $S = \{(x, 1-x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$, da cui
  $$g(x) := f(x, 1-x) = x^3 - (1-x)^3 - x(1-x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1,\ x \in [0,1].$$
  Allora $g'(x) = 6x^2 - 4x + 2$, che è sempre positiva in $[0,1]$; ne segue che $x = 0$ è punto di minimo assoluto per g, mentre $x = 1$ è punto di massimo assoluto per g; dunque $(0,1)$ è punto di minimo assoluto per f su S e $(1,0)$ è punto di massimo assoluto per f su S.
- Come abbiamo detto prima, la funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, pertanto è differenziabile e quindi il grafico di f ammette piano tangente in ogni punto. L'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,1)$ è
  $$z = f(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot (x-1, y-1) \equiv -1 + (2,-4) \cdot (x-1, y-1)$$
  ovvero $z = 2x - 4y + 1$.
- Essendo il versore generico del piano dato da $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e la funzione differenziabile, per il teorema del gradiente risulta:
  $$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) \equiv (2,-4) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = 2\cos\theta - 4\sin\theta,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

1.b) La curva $x^2+y^2+xy-1 = 0$ è una ellisse reale e pertanto è un insieme compatto, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi la funzione, per il teorema di Weierstrass, ammette massimi e minimi assoluti; per il loro calcolo utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e poniamo
$$F(x, y, a) = xy + a(x^2 + y^2 + xy - 1).$$
Il vincolo risulta di classe almeno C^1 ed il suo gradiente si annulla solo nell'origine che non appartiene al vincolo. Ne risulta che i punti di massimo e di minimo vincolato devono annullare il gradiente di F.
$$\begin{cases} y + a(2x + y) = 0 \\ x + a(2y + x) = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases}$$
Dalla prima e dalla seconda equazione si può dedurre che $a \neq 0$ altrimenti dovrebbe risultare $(x, y) = (0, 0)$ che non è soluzione della terza equazione. Risulta
$$\nabla F = (0,0,0) \iff \begin{cases} y(1+a) + 2ax = 0 \\ x(1+a) + 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y(1+a) + 2ax = 0 \\ y = \pm x \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \iff$$
$$\begin{cases} y = x \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -x \\ x^2 = 1 \end{cases} \iff \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), (1,-1), (-1,1).$$
Risulta $f(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{3}$, mentre $f(1,-1) = f(-1,1) = -1$. I primi due punti sono pertanto di massimo assoluto vincolato per f, mentre i rimanenti due sono di minimo assoluto vincolato.

2) L'equazione differenziale $y'(x) = -\dfrac{y}{x} + 2y^2$ è del tipo di Bernoulli con $s = 2$; visto il dato iniziale supponiamo che $x > 0$ e trasformiamo l'equazione in una lineare utilizzando la sostituzione $y^{-1} = z$. Risulta allora

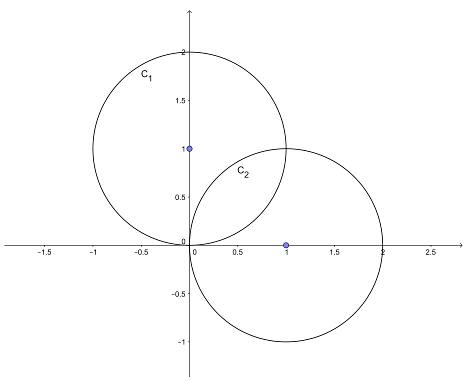
$$y'(x) = -\frac{y}{x} + 2y^2 \qquad y^{-2}y' = -\frac{y^{-1}}{x} + 2 \qquad z = y^{-1}$$
$$z' = +\frac{z}{x} - 2 \qquad z(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left\{-2\int e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx + c\right\}$$
$$z(x) = x\left\{-2\int \frac{1}{x}dx + c\right\} \qquad z(x) = x(-2\log x + c) \qquad y(x) = \frac{1}{x(-2\log x + c)}$$

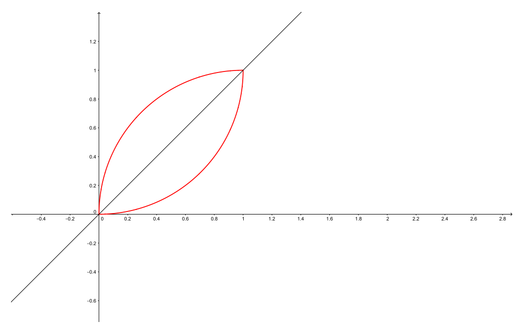
Osserviamo che la y non è definita su tutto $\mathbb{R}^+$, ma il suo dominio dipende dal parametro c. Imponiamo ora la condizione iniziale e troviamo $c = 1$ e quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{x(-2\log x + 1)}, \qquad x \in]0, \sqrt{e}[.$$

3) Le due circonferenze che delimitano l'insieme D hanno equazioni cartesiane

$$C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2y = 0;$$
$$C_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$





Osserviamo che l'insieme è simmetrico rispetto alla retta $y = x$; poiché anche la funzione è simmetrica rispetto allla stessa retta (essendo $f(x,y) = f(y,x)$), si ha

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy = 2\iint_{D_1} (x^2 + y^2)\,dxdy$$

ove (senza restrizione di generalità) D_1 è la parte di D al di sopra della retta. Risolviamo l'integrale passando a coordinate polari con polo nell'origine degli assi cartesiani $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta\,;\ j(\theta,\rho) = \rho$. In tal caso la circonferenza C_2 che delimita D_1 dall'alto si riscrive

$$(\rho\cos\theta - 1)^2 + \rho^2\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \boxed{\rho = 2\cos\theta};$$

allora l'insieme D_1 viene trasformato nell'insieme $\tilde{D}_1 = \{(\theta,\rho) : \pi/4 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 2\cos\theta\}$

ed otteniamo

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy &= 2\iint_{\tilde{D}_1} \rho^3 d\theta d\rho = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho^3 d\rho \right) d\theta = \\
&= 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta = 8\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta = \\
&= 8\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos^2\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta) d\theta = \\
&= 8\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta - 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2 2\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\pi - 2.
\end{aligned}$$

Analisi Matematica II - II esonero - 14 Dicembre 2017

1) Calcolare in almeno due modi il flusso del vettore $\vec{F} = (x, y, z^2)$ uscente da $Fr(D)$ quando $D = \{(x, y, z) : -1 \le z \le -(x^2 + y^2)\}$.

2) Dire se la forma differenziale lineare

$$\omega = \left(\log y + \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy$$

è esatta nel suo insieme di definizione. Se si, calcolare la famiglia delle primitive. Calcolare $I = \int_C \omega$ quando C è individuato da $y(x) = \frac{x^2 - x + 2}{2} + \frac{\sin \pi(x-1)}{2 + \cos x}$, $1 \le x \le 2$, in due modi diversi.

3) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1 + n^2 x^2} - \frac{x}{1 + (n-1)^2 x^2}\right).$$

Svolgimento

1) D è un dominio regolare la **cui frontiera è data da** $A = \{(x, y, -(x^2 + y^2)),\ x^2 + y^2 \le 1\}$ **e da** $B = \{(x, y, -1);\ x^2 + y^2 \le 1\}$. Le normali uscenti sono rispettivamente: $n_A = (2x, 2y, 1)$ e $n_B = (0, 0, -1)$. Siccome $F \in C^1(D)$, per il teorema della divergenza, risulta:

$$\begin{aligned}
\int_{Fr(D)} \vec{F} \cdot n_e dS &= \iiint_D div(\vec{F}) dxdydz = \iiint_D (2 + 2z) dxdydz = \iint_{\{x^2+y^2 \le 1\}} dxdy \int_{-1}^{-(x^2+y^2)} (2 + 2z) dz = \\
&= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 r dr \int_{-1}^{-r^2} (2 + 2z) dz = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 r [2z + z^2]_{-1}^{-r^2} dr = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 r[-2r^2 + 2 + r^4 - 1] dr = \\
&= 2\pi \int_0^1 (-2r^3 + r^5 + r) dr = 2\pi \left[-\frac{r^4}{2} + \frac{r^6}{6} + \frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Facciamo ora il calcolo diretto:

$$\begin{aligned}
\int_{Fr(D)} \vec{F} \cdot n_e dS &= \int_A \vec{F}_A \cdot n_A dS + \int_B \vec{F}_B \cdot n_B dS = \iint_{\{x^2+y^2 \le 1\}} (x, y, (x^2 + y^2)^2) \cdot (2x, 2y, 1) dxdy + \\
&+ \iint_{\{x^2+y^2 \le 1\}} (x, y, 1) \cdot (0, 0, -1) dxdy = \iint_{\{x^2+y^2 \le 1\}} (x^2 + y^2)(2 + x^2 + y^2) dxdy - \pi \\
&= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 r^3 (2 + r^2) dr - \pi = 2\pi \left[\frac{r^4}{2} + \frac{r^6}{6}\right]_0^1 - \pi = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

2) Risulta $\omega \in C^1(\Omega)$ dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Inoltre

$$X'_y = \frac{1}{y} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = Y'_x$$

e dunque la forma differenziale lineare è chiusa. Siccome poi Ω è una regione priva di buchi (semplicemente conesso) allora ω è anche esatta. Per determinare la famiglia delle sue primitive osserviamo che

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int \log y + \frac{y}{x^2+y^2} dx = x\log y - \arctan\frac{y}{x} + g(y), \quad g \in C^1(\mathbb{R}^+) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{x}{y} - \frac{x}{x^2+y^2} + g'(y) = Y \quad \iff \quad g(y) = c \\
F(x,y) &= x\log y - \arctan\frac{y}{x} + c, \quad F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

La curva data $C \subset \Omega$, infatti la quantità $x^2 - x + 2$ è sempre positiva $(\Delta < 0)$, $0 \leq \pi(x-1) \leq \pi$ quando $1 \leq x \leq 2$ e $2 + \cos x > 0$ sempre. La curva C congiunge i punti $(1,1)$ (punto iniziale) e $(2,2)$ (punto finale). Pertanto

$$\int_C \omega = F(2,2) - F(1,1) = 2\log 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \log 4.$$

Visto che la forma differenziale lineare ω è esatta, l'integrale curvilineo I non dipende dal percorso seguito, ma solo da punto iniziale, dal punto finale e dal verso di percorrenza. Possiamo allora sostituire alla curva C il segmento $(t,t), 1 \leq t \leq 2$.

$$I \;=\; \int_1^2 \left(\log t + \frac{t}{2t^2}\right) dt + \left(1 - \frac{t}{2t^2}\right) dt = \int_1^2 (\log t + 1) dt = [t\log t]_1^2 = \log 4.$$

3) Si tratta di una serie telescopica, risulta $s_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2} - x$. Studiamo allora la successione $(s_n(x))_n$. Se $x = 0$ allora $s_n(0) = 0$ per ogni n e quindi il suo limite $f(0) = 0$, se invece $x \neq 0$ allora $f(x) = -x$. Pertanto la serie converge puntualmente alla funzione $f(x) = -x$. Per studiare la convergenza uniforme basta calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} |s_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

La funzione $g_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ è derivabile in $\mathbb{R}^+$ e risulta

$$g_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \geq 0 \quad \iff \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \frac{x}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} g_n(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

La serie dunque converge uniformemente ad f.

Analisi Matematica II - appello del 21 Novembre 2017

---

1) Studiare i massimi e i minimi vincolati della funzione $f(x,y) = xy$ sotto in vincolo $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$.

2) Assegnato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{2y-1}{(x+y)^2}, -\frac{1+2x}{(x+y)^2}\right), (x,y) \in \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x\}$$

provare che

- $\vec{F}$ è conservativo su Ω;
- determinare il potenziale di $\vec{F}$ che nel punto $(-1,0)$ vale 4;
- calcolare il lavoro di $\vec{F}$ lungo il segmento congiungente $(-2,0)$ con $(0,-2)$ e verificare il risultato con un metodo alternativo.

3) Dopo aver disegnato l'insieme D dato dalla parte di piano comune ai due cerchi di centri $(1,0)$ e $(0,1)$, entrambi di raggio 1, calcolare

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy.$$

Svolgimento

1) La curva $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$ è una ellisse reale e pertanto è un insieme compatto, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi la funzione, per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti; per il loro calcolo utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e poniamo

$$F(x,y,a) = xy + a(x^2 + y^2 + xy - 1).$$

Il vincolo risulta di classe almeno C^1 ed il suo gradiente si annulla solo nell'origine che non appartiene al vincolo. Ne risulta che i punti di massimo e di minimo vincolato devono annullare il gradiente di F.

$$\begin{cases} y + a(2x+y) = 0 \\ x + a(2y+x) = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si può dedurre che $a \neq 0$ altrimenti dovrebbe risultare $(x,y) = (0,0)$ che non è soluzione della terza equazione. Risulta

$$\nabla F = (0,0,0) \iff \begin{cases} y(1+a) + 2ax = 0 \\ x(1+a) + 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y(1+a) + 2ax = 0 \\ y = \pm x \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = x \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -x \\ x^2 = 1 \end{cases} \iff (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}), (1,-1), (-1,1).$$

Risulta $f(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{3}$, mentre $f(1,-1) = f(-1,1) = -1$. I primi due punti sono pertanto di massimo assoluto vincolato per f, mentre i rimanenti due sono di minimo assoluto vincolato.

2)

- Il campo $\vec{F}$ è irrotazionale, infatti
  1. $\vec{F} \in C^1(\Omega)$ (rapporto di polinomi e i denominatori non si annullano) e
  2. $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$, visto che:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) &= \frac{2(x+y)-2(2y-1)}{(x+y)^3} = \frac{2x-2y+2}{(x+y)^3}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) &= -\frac{2(x+y)-2(1+2x)}{(x+y)^3} = -\frac{-2x+2y-2}{(x+y)^3}.\end{aligned}$$

Siccome Ω è una regione piana prova di buchi (semplicemente connesso) e $\vec{F}$ è irrotazionale, allora $\vec{F}$ è anche conservativo.

- Determiniamo ora la famiglia dei suoi potenziali U. Deve risultare:

$$\nabla U_x(x,y) = \left(\frac{2y-1}{(x+y)^2}, -\frac{1+2x}{(x+y)^2}\right)$$

integrando la prima equazione rispetto ad x si ha

$$U(x,y) = \int \frac{2y-1}{(x+y)^2}\,dx = -\frac{2y-1}{x+y} + c(y), \qquad c \in C^1$$

allora

$$U_y(x,y) = -\frac{2(x+y)-(2y-1)}{(x+y)^2} + c'(y) = -\frac{2x+1}{(x+y)^2} + c'(y);$$

sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$-\frac{2x+1}{(x+y)^2} + c'(y) = -\frac{1+2x}{(x+y)^2} \Leftrightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = k \in \mathbb{R}.$$

Quindi la famiglia dei potenziali è

$$U(x,y) = \frac{1-2y}{x+y} + k,\ \ k \in \mathbb{R}.$$

Il potenziale cercato è tale che $4 = U(-1,0) = -1 + k \Rightarrow k = 5$, dunque

$$U(x,y) = \frac{1+5x+3y}{x+y}.$$

- Essendo il campo conservativo, si ha

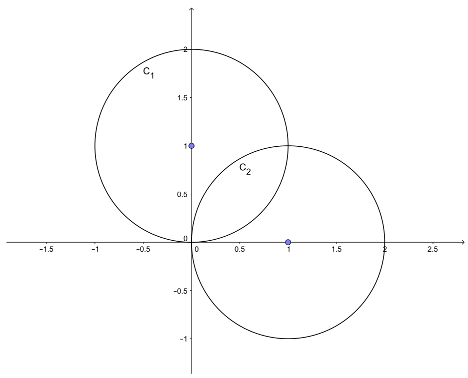
$$L = U(0,-2) - U(-2,0) = -2.$$

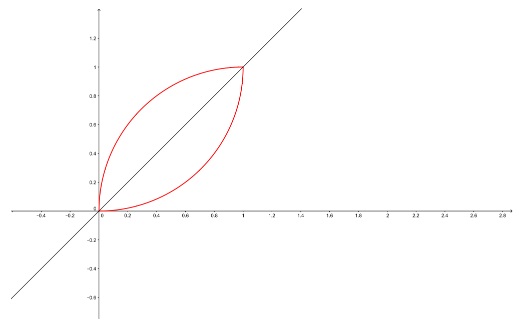
Per verificare il risultato, calcoliamo direttamente l'integrale curvilineo di II specie lungo il segmento parametrizzato da $\vec{r}(t) = (t, -t-2)$, $-2 \le t \le 0$:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-2}^{0} \vec{F}(t,-t-2)\cdot\vec{r}'(t)dt = \int_{-2}^{0}\left(\frac{-2t-5}{4}, -\frac{1+2t}{4}\right)\cdot(1,-1)dt =\\ &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{0}(-2t-5+1+2t)dt = -2.\end{aligned}$$

3) Le due circonferenze che delimitano l'insieme D hanno equazioni cartesiane

$$C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2y = 0;$$
$$C_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$





Osserviamo che l'insieme è simmetrico rispetto alla retta $y = x$; poiché anche la funzione è simmetrica rispetto allla stessa retta (essendo $f(x,y) = f(y,x)$), si ha

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = 2 \iint_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

ove (senza restrizione di generalità) D_1 è la parte di D al di sopra della retta. Risolviamo l'integrale passando a coordinate polari con polo nell'origine degli assi cartesiani $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta\,;\ j(\theta,\rho) = \rho$. In tal caso la circonferenza C_2 che delimita D_1 dall'alto si riscrive

$$(\rho\cos\theta - 1)^2 + \rho^2\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \boxed{\rho = 2\cos\theta};$$

(osserviamo che si perviene allo stesso risultato se si considera il triangolo rettangolo iscritto nella semicirconferenza). L'insieme D_1 viene trasformato nell'insieme $\tilde{D}_1 = \{(\theta,\rho) : \pi/4 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 2\cos\theta\}$ e

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy &= 2\iint_{\tilde{D}_1} \rho^2 d\theta d\rho = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho \right) d\theta = \\
&= \frac{2}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\rho^3\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{16}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^3\theta d\theta = \\
&= \frac{16}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos\theta - \cos\theta\sin^2\theta) d\theta = \frac{16}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \\
&= \frac{16}{9}\left(2 - \frac{5}{4}\sqrt{2}\right) = \frac{32 - 20\sqrt{2}}{9}.
\end{aligned}$$

Compito A

Analisi Matematica II - I esonero 27 Marzo 2018

---

1) Studiare i tipi di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}}$, $x \in \mathbb{R}$, e calcolare

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} dx.$$

2) Data la funzione $f(x,y) = 2(1+x^2+y^2) - (x^4+y^4)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: determinare i suoi punti critici e stabilirne la natura; calcolare l'espressione delle derivate direzionali di f in $(1/2, 0)$.

Svolgimento

1) Si tratta di una serie di potenze, per il criterio del rapporto risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)|x|^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{(n+1)|x|^n} = \frac{|x|}{2} < 1 \Longleftrightarrow |x| < 2$$

Peranto il raggio di convergenza è $r = 2$; inoltre se $x = \pm 2$ allora la serie non converge. La convergenza non può essere totale in $]-2,2[$ perché

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{]-2,2[} \frac{(n+1)|x|^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2} = \infty$$

e nemmeno uniforme in $]-2,2[$ perché se lo fosse, per il Criterio di Cauchy, risulterebbe $\forall \varepsilon > o$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon) \wedge \forall p \in \mathbb{N} \Longrightarrow$

$$\left| \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{(n+p)x^{n+p}}{2^{n+p}} \right| \leq \varepsilon \quad \forall x : -2 < x < 2$$

e pertanto

$$\lim_{x\to 2^-} \left| \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{(n+p)x^{n+p}}{2^{n+p}} \right| = (n+1) + \ldots (n+p) \leq \varepsilon$$

che è assurdo.

La serie converge totalmente in ogni intervallo $[-\rho, \rho]$ con $0 < \rho < 2$. Pertanto in $[0,1]$ la convergenza è uniforme e vale il passaggio di serie sotto il segno di integrale di Riemann:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 (n+1)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 \frac{d}{dx} x^{n+1} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} \right]_0^1 = \frac{1}{1-1/2} - 1 = 1.\end{aligned}$$

2) La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e pertanto i punti estremanti si trovano tra i punti che annullano il suo gradiente $\nabla f := (-4x^3 + 4x, -4y^3 + 4y)$. I punti critici che emergono da $\nabla f = (0,0)$ annullano il gradiente sono $(0,0), (0,\pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1)$ e siccome la funzione f pari nelle variabili x e y ed inoltre $f(x,y) = f(y,x)$, basterà studiare i punti $(0,0), (1,0), (1,1)$. Risulta

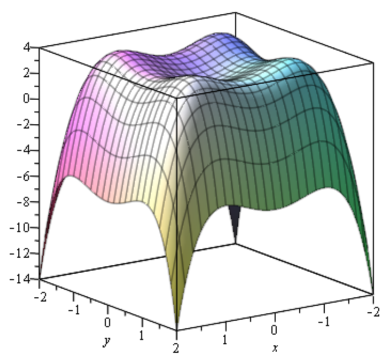
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 + 4 & 0 \\ 0 & -12y^2 + 4 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$	$detH = 16 > 0 \quad f''_{xx} = 4 > 0$	minimo relativo
$(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$	$detH = -32 < 0$	punti sella
$(\pm 1, \pm 1)$	$detH = 64 > 0 \quad f''_{xx} = -8 < 0$	punti di massimo relativo

Ricordando che tutti i versori del piano sono descritti da $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$ ed osservando che f è differenziabile ovunque, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \nabla f\left(\frac{1}{2}, 0\right) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \frac{3}{2}\cos\theta,\ \theta \in [0, 2\pi[.$$

Il grafico della funzione è il seguente



Compito B

Analisi Matematica II - I esonero 27 Marzo 2018

1) Studiare i tipi di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$, $x \in \mathbb{R}$, e calcolare in $x \in [0,1]$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}.$$

2) Data la funzione $f(x,y) = 2(1+x^4+y^4) - (x^2+y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

determinare i suoi punti critici e stabilirne la natura;

calcolare l'espressione delle derivate direzionali di f in $(1/4, 0)$.

Svolgimento

1) Si tratta di una serie di potenze, per il criterio del rapporto risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)2^{n+2}} \cdot \frac{(n+1)2^{n+1}}{|x|^{n+1}} = \frac{|x|}{2} < 1 \Longleftrightarrow |x| < 2$$

Pertanto il raggio di convergenza è $r = 2$; inoltre se $x = 2$ allora la serie diverge, converge semplicemente se $x = -2$. Quindi c'è convergenza puntuale in $[-2, 2[$, assoluta in $]-2, 2[$ ed uniforme in $[-2, a[$ con $a < 2$ (Abel). La convergenza non può essere totale in $]-2, 2[$ perché

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{]-2,2[} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

e nemmeno uniforme in $]-2, 2[$ perché se lo fosse, per il Criterio di Cauchy, risulterebbe
$\forall \varepsilon > o$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon) \wedge \forall p \in \mathbb{N} \Longrightarrow$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + \ldots + \frac{x^{n+p}}{(n+p)2^{n+p}} \right| \leq \varepsilon \quad \forall x : -2 < x < 2$$

e pertanto

$$\lim_{x\to 2^-} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + \ldots + \frac{x^{n+p}}{(n+p)2^{n+p}} \right| = \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{n+p} \leq \varepsilon$$

che è assurdo (la serie armonica diverge).
La serie converge totalmente in ogni intervallo $[-\rho, \rho]$ con $0 < \rho < 2$. Pertanto in $[0,1]$ la convergenza della serie e della serie delle derivate è uniforme e vale il passaggio di serie sotto il segno di derivata:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^{n+1}} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{d}{dx} \frac{x^{n+1}}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - x/2} \right) = \frac{1}{2-x}.
\end{aligned}$$

2) La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e pertanto i punti estremanti si trovano tra i punti che annullano il suo gradiente $\nabla f := (8x^3 - 2x, 8y^3 - 2y)$. I punti critici che emergono da $\nabla f = (0,0)$ annullano il gradiente sono $(0,0), (0, \pm 1/2), (\pm 1/2, 0), (\pm 1/2, \pm 1/2)$ e siccome la funzione f pari nelle variabili x e y ed inoltre $f(x,y) = f(y,x)$, basterà studiare i punti $(0,0), (1/2,0), (1/2,1/2)$. Risulta

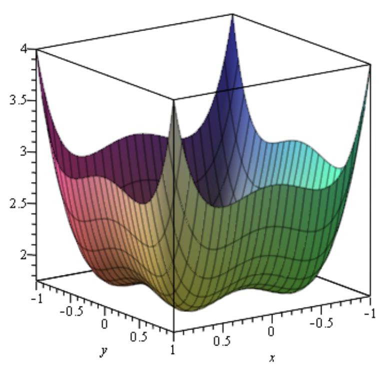
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 24y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$	$detH = 4 > 0 \quad f''_{xx} = -2 < 0$	massimo relativo
$(\pm 1/2, 0), (0, \pm 1/2)$	$detH = -8 < 0$	punti sella
$(\pm 1/2, \pm 1/2)$	$detH = 16 > 0 \quad f''_{xx} = 4 > 0$	punti di minimo relativo

Ricordando che tutti i versori del piano sono descritti da $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$ ed osservando che f è differenziabile ovunque, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{4}, 0\right) = \nabla f\left(\frac{1}{4}, 0\right) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = -\frac{3}{4}\cos\theta,\ \theta \in [0, 2\pi[.$$

Il grafico della funzione è il seguente



Compito C

Analisi Matematica II - I esonero 27 Marzo 2018

---

1) Studiare i tipi di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2x)^n}{4^{n+1}}$, $x\in\mathbb{R}$, e calcolare

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2x)^n}{4^{n+1}}dx.$$

2) Data la funzione $f(x,y)=2(1-x^4-y^4)+x^2+y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

determinare i suoi punti critici e stabilirne la natura;

calcolare l'espressione delle derivate direzionali di f in $(1/4,0)$.

Svolgimento

1) Si tratta di una serie di potenze, il cui termine generale

$$\frac{(n+1)(2x)^n}{4^{n+1}}=\frac{(n+1)x^n}{2^{n+2}}.$$

Per il criterio del rapporto risulta:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)|x|^{n+1}}{2^{n+3}}\cdot\frac{2^{n+2}}{(n+1)|x|^n}=\frac{|x|}{2}<1 \quad\Longleftrightarrow |x|<2.$$

Pertanto il raggio di convergenza è $r=2$. Non c'é convergenza in $x=\pm 2$. La convergenza non può essere totale in $]-2,2[$ perché

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{]-2,2[}\frac{(n+1)|x|^n}{2^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4}=\infty$$

e nemmeno uniforme in $]-2,2[$ perché se lo fosse, per il Criterio di Cauchy, risulterebbe $\forall\varepsilon>o,\ \exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n(\varepsilon)\wedge\forall p\in\mathbb{N}\Longrightarrow$

$$\left|\frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{(n+p)x^{n+p}}{2^{n+p}}\right|\leq\varepsilon \quad \forall x: -2<x<2$$

e pertanto

$$\lim_{x\to 2^-}\left|\frac{(n+1)x^n}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{(n+2+p)x^{n+p}}{2^{n+2+p}}\right|=\frac{(n+1)+\ldots(n+p)}{4}\leq\varepsilon$$

che è assurdo.

La serie converge totalmente in ogni intervallo $[-\rho,\rho]$ con $0<\rho<2$. Pertanto in $[0,1]$ la convergenza è uniforme e vale il passaggio di serie sotto il segno di integrale di Riemann:

$$\begin{aligned}\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^{n+2}}dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}\int_0^1(n+1)x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}\int_0^1\frac{d}{dx}x^{n+1}dx=\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-1/2}-1\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2) La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e pertanto i punti estremanti si trovano tra i punti che annullano il suo gradiente $\nabla f := (-8x^3 + 2x, -8y^3 + 2y)$. I punti critici che emergono da $\nabla f = (0,0)$ annullano il gradiente sono $(0,0), (0, \pm 1/2), (\pm 1/2, 0), (\pm 1/2, \pm 1/2)$ e siccome la funzione f pari nelle variabili x e y ed inoltre $f(x,y) = f(y,x)$, basterà studiare i punti $(0,0), (1/2, 0), (1/2, 1/2)$. Risulta

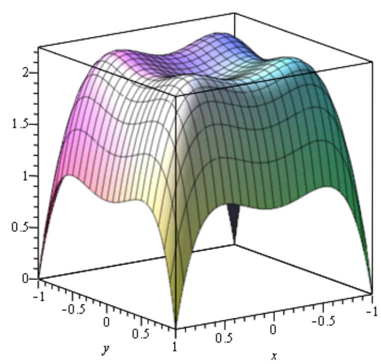
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -24x^2 + 2 & 0 \\ 0 & -24y^2 + 2 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$	$detH = 4 > 0 \quad f''_{xx} = 2 > 0$	minimo relativo
$(\pm 1/2, 0), (0, \pm 1/2)$	$detH = -8 < 0$	punti sella
$(\pm 1/2, \pm 1/2)$	$detH = 16 > 0 \quad f''_{xx} = -4 > 0$	punti di massimo relativo

Ricordando che tutti i versori del piano sono descritti da $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$ ed osservando che f è differenziabile ovunque, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{4}, 0\right) = \nabla f\left(\frac{1}{4}, 0\right) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \frac{3}{4}\cos\theta,\ \theta \in [0, 2\pi[.$$

Il grafico della funzione è il seguente



Compito D

Analisi Matematica II - I esonero 27 Marzo 2018

1) Studiare i tipi di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{n+1}}{(n+1)9^{n+1}}$, $x \in \mathbb{R}$, e calcolare in $x \in [0,1]$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{n+1}}{(n+1)9^{n+1}}.$$

2) Data la funzione $f(x,y) = 2(1-x^2-y^2)+x^4+y^4$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

determinare i suoi punti critici e stabilirne la natura;

calcolare l'espressione delle derivate direzionali di f in $(1/2, 0)$.

Svolgimento

1) Si tratta di una serie di potenze, il cui termine generale

$$\frac{(3x)^{n+1}}{(n+1)9^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}.$$

Per il criterio del rapporto risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)3^{n+2}} \cdot \frac{(n+1)3^{n+1}}{|x|^{n+1}} = \frac{|x|}{3} < 1 \Longleftrightarrow |x| < 3$$

Peranto il raggio di convergenza è $r = 3$; inoltre se $x = 3$ allora la serie diverge, mentre converge semplicemente per $x = -3$. Quindi c'è convergenza puntuale in $[-3,3[$, assoluta in $]-3,3[$, uniforme in $[-3,a]$ con $a < 3$ (Abel). La convergenza non può essere totale in $]-3,3[$ perché

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{]-3,3[} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

e nemmeno uniforme in $]-3,3[$ perché se lo fosse, per il Criterio di Cauchy, risulterebbe $\forall \varepsilon > o$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon) \wedge \forall p \in \mathbb{N} \Longrightarrow$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} + \ldots + \frac{x^{n+p}}{(n+p)3^{n+p}} \right| \leq \varepsilon \quad \forall x : -3 < x < 3$$

e pertanto

$$\lim_{x\to 3^-} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} + \ldots + \frac{x^{n+p}}{(n+p)3^{n+p}} \right| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} \leq \varepsilon$$

che è assurdo (la serie armonica diverge).

La serie converge totalmente in ogni intervallo $[-\rho,\rho]$ con $0 < \rho < 3$. Pertanto in $[0,1]$ la convergenza della serie e della serie delle derivate è uniforme e vale il passaggio di serie sotto il segno di derivata:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x/3}\right) = \frac{1}{3-x}. \end{aligned}$$

2) La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e pertanto i punti estremanti si trovano tra i punti che annullano il suo gradiente $\nabla f := (4x^3 - 4x, 4y^3 - 4y)$. I punti critici che emergono da $\nabla f = (0,0)$ annullano il gradiente sono $(0,0), (0,\pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1)$ e siccome la funzione f pari nelle variabili x e y ed inoltre $f(x,y) = f(y,x)$, basterà studiare i punti $(0,0), (1,0), (1,1)$. Risulta

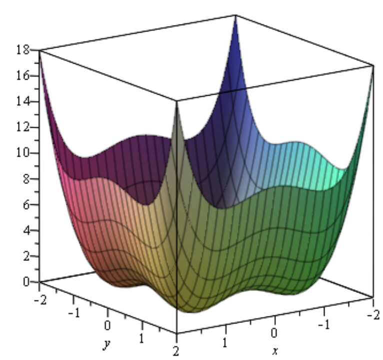
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$	$detH = 16 > 0 \quad f''_{xx} = -4 < 0$	massimo relativo
$(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$	$detH = -32 < 0$	punti sella
$(\pm 1, \pm 1)$	$detH = 64 > 0 \quad f''_{xx} = 8 > 0$	punti di minimo relativo

Ricordando che tutti i versori del piano sono descritti da $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$ ed osservando che f è differenziabile ovunque, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \nabla f\left(\frac{1}{2}, 0\right) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = -\frac{3}{2}\cos\theta,\ \theta \in [0, 2\pi[.$$

Il grafico della funzione è il seguente



Appello del 27 Marzo 2018

Analisi Matematica II - Modulo Analisi per Mat. 2

---

1) Studiare i tipi di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)x^n}{2^{n+1}}$ e calcolare

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} dx.$$

2) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = 2(1 - x^4 - y^4) + (x^2 + y^2)$ e determinarne la natura

---

Svolgimento

1) Si tratta di una serie di potenze, per il criterio del rapporto risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)|x|^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{(n+1)|x|^n} = \frac{|x|}{2} < 1 \Longleftrightarrow |x| < 2$$

Peranto il raggio di convergenza è $r = 2$; inoltre se $x = \pm 2$ allora la serie non converge. La convergenza non può essere totale perché

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{]-2,2[} \frac{(n+1)|x|^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2} = \infty$$

e nemmeno uniforme in $]-2,2[$ perché se lo fosse, per il Criterio di Cauchy, risulterebbe $\forall \varepsilon > o$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\varepsilon) \wedge \forall p \in \mathbb{N} \Longrightarrow$

$$\left| \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{(n+p)x^{n+p}}{2^{n+p}} \right| \leq \varepsilon \quad \forall x : -2 < x < 2$$

e pertanto

$$\lim_{x\to 2^-} \left| \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{(n+p)x^{n+p}}{2^{n+p}} \right| = (n+1) + \ldots (n+p) \leq \varepsilon$$

che è assurdo.

La serie converge totalmente in ogni intervallo $[-\rho, \rho]$ con $0 < \rho < 2$. Pertanto in $[0,1]$ la convergenza è uniforme e vale il passaggio di serie sotto il segno di integrale di Riemann:

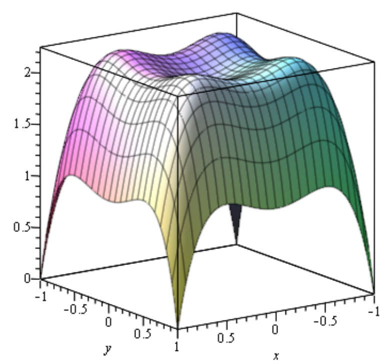
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 (n+1)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 \frac{d}{dx} x^{n+1} dx = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} \right]_0^1 = \frac{1}{1 - 1/2} - 1 = 1.
\end{aligned}$$

2) La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e pertanto i punti estremanti si trovano tra i punti che annullano il suo gradiente $\nabla f := (-8x^3 + 2x, -8y^3 + 2y)$. I punti critici che emergono da $\nabla f = (0,0)$ annullano il gradiente sono $(0,0), (0, \pm 1/2), (\pm 1/2, 0), (\pm 1/2, \pm 1/2)$ e siccome la funzione f pari nelle variabili x e y ed inoltre $f(x,y) = f(y,x)$, basterà studiare i punti $(0,0), (1/2,0), (1/2,1/2)$. Risulta

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -24x^2 + 2 & 0 \\ 0 & -24y^2 + 2 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$	$detH = 4 > 0 \quad f''_{xx} = 2 > 0$	minimo relativo
$(\pm 1/2, 0), (0, \pm 1/2)$	$detH = -8 < 0$	punti sella
$(\pm 1/2, \pm 1/2)$	$detH = 16 > 0 \quad f''_{xx} = -4 > 0$	punti di massimo relativo

Il grafico della funzione è il seguente



Compito A

Analisi Matematica II - II esonero 22 Maggio 2018

1. Assegnata la forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + 1}}\,dx + \left(\frac{\sin y \cos y}{\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + 1}} + e^{2y}\right) dy$$

a) provare che essa è esatta nel suo campo d'esistenza e determinarne la classe delle primitive;

b) calcolare $\int_\gamma \omega$ ove $\gamma := (x(t), y(t)) = (t, \pi - t)$, $0 \le t \le \pi$.

2. Calcolare l'integrale di superficie $\int_\Sigma \frac{|z|}{|x+y|\sqrt{1+x^2+y^2}}dS$ ove $\Sigma : z = \frac{x^2-y^2}{2}$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

Svolgimento.

1. a) Il campo d'esistenza della forma differenziale lineare data è tutto $\mathbb{R}^2$, il quale è aperto e convesso. Inoltre la forma è chiusa in quanto ω è anche di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e poste

$$a(x,y) = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + 1}} \quad \text{e} \quad b(x,y) = \frac{\sin y \cos y}{\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + 1}} + e^{2y}\ ,$$

si ha

$$a_y(x,y) = -\frac{\sin x \cos x \sin y \cos y}{(\sin^2 x + \sin^2 y + 1)^{3/2}} = b_x(x,y)\ .$$

Possiamo concludere che ω è anche esatta. Sappiamo che ogni primitiva di ω soddisfa il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = a(x,y) \\ f_y(x,y) = b(x,y) \end{cases}$$

che nel nostro caso vuol dire

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + 1}} \\[2em] f_y(x,y) = \dfrac{\sin y \cos y}{\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + 1}} + e^{2y}\ . \end{cases}$$

Integrando rispetto ad x la prima equazione si ricava

$$f(x,y) = \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + 1}}\,dx = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + 1} + c(y)\ ;$$

derivando questa rispetto ad y e sostituendo quanto ottenuto nella seconda equazione si ottiene l'identità

$$\frac{\sin y \cos y}{\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + 1}} + c'(y) = \frac{\sin y \cos y}{\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + 1}} + e^{2y}$$

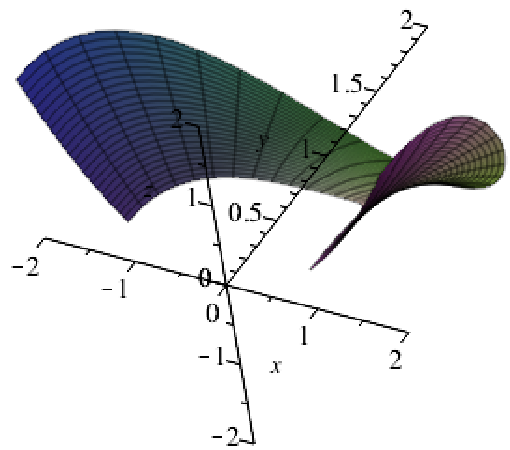
ovvero $c'(y) = e^{2y}$. Allora risulta $c(y) = \dfrac{e^{2y}}{2} + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$ da cui possiamo concludere che la famiglia delle primitive è

$$f(x,y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + 1} + \frac{e^{2y}}{2} + c\ ,\ c \in \mathbb{R}.$$

b) Per quanto riguarda l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \omega$, siamo nelle condizioni di applicare il teorema di integrazione delle forme differenziali lineari esatte, da cui abbiamo

$$\int_\gamma \omega = f(\pi, 0) - f(0, \pi) = \frac{1 - e^{2\pi}}{2}\ .$$

2. La superficie Σ ha grafico dato da:



Essendo espressa in forma cartesiana, si ha

$$\begin{aligned} I &:= \int_\Sigma \frac{|z|}{|x+y|\sqrt{1+x^2+y^2}} dS = \iint_D \frac{|\frac{x^2-y^2}{2}|}{|x+y|\sqrt{1+x^2+y^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \\ &= \frac{1}{2}\iint_D \frac{|(x+y)(x-y)|}{|x+y|}dxdy = \frac{1}{2}\iint_D |x-y|dxdy. \end{aligned}$$

Data la forma di D, passiamo a coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases},\qquad j(\theta,\rho) = \rho,\ dxdy = \rho d\rho d\theta$$

per cui D viene trasformato nel rettangolo $D' = [0,\pi] \times [1,2]$ e si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\int_1^2 |\rho\cos\theta - \rho\sin\theta|\rho d\rho\right) d\theta \underbrace{=}_{var.\,sep.;\,dom.\,rett.} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi |\cos\theta - \sin\theta| d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 \left[\int_0^{\pi/4} (\cos\theta - \sin\theta)d\theta + \int_{\pi/4}^\pi (\sin\theta - \cos\theta)d\theta\right] = \\ &= \frac{7}{6}\left\{[\sin\theta + \cos\theta]_0^{\pi/4} - [\cos\theta + \sin\theta]_{\pi/4}^\pi\right\} = \frac{7}{3}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Compito B

Analisi Matematica II - II esonero 22 Maggio 2018

---

1. Assegnata la forma differenziale lineare

$$\omega = -\left(\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + 1}} - e^x\right) dx \; - \; \frac{\sin y \cos y}{\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + 1}}\, dy$$

a) provare che essa è esatta nel suo campo d'esistenza e determinarne la classe delle primitive;

c) calcolare $\int_\gamma \omega$ ove $\gamma := (x(t), y(t)) = (t, \frac{\pi}{2} - t)$, $\frac{\pi}{2} \geq t \geq 0$.

2. Calcolare l'integrale di superficie $\int_\Sigma \frac{|z|}{|x+y|\sqrt{1+x^2+y^2}} dS$ ove $\Sigma : z = \frac{x^2 - y^2}{2}$, $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

---

1. a) Il campo d'esistenza della forma differenziale lineare data è tutto $\mathbb{R}^2$, il quale è aperto e convesso. Inoltre la forma è chiusa in quanto ω è anche di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e poste

$$a(x, y) = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + 1}} + e^x \quad \text{e} \quad b(x, y) = -\frac{\sin y \, \cos y}{\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + 1}} \; ,$$

si ha

$$a_y(x, y) = \frac{\sin x \cos x \sin y \cos y}{(\cos^2 x + \cos^2 y + 1)^{3/2}} = b_x(x, y) \; .$$

Possiamo concludere che ω è anche esatta. Sappiamo che ogni primitiva di ω soddisfa il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = a(x, y) \\ f_y(x, y) = b(x, y) \end{cases}$$

che nel nostro caso vuol dire

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -\dfrac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + 1}} + e^x \\ \\ f_y(x, y) = -\dfrac{\sin y \, \cos y}{\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + 1}} \; . \end{cases}$$

Integrando rispetto ad x la prima equazione si ricava

$$f(x, y) = \int -\frac{\sin x \, \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + 1}} + e^x \, dx = \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + 1} + e^x + c(y) \; ;$$

derivando questa rispetto ad y e sostituendo quanto ottenuto nella seconda equazione si ottiene l'identità

$$-\frac{\sin y \cos y}{\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + 1}} + c'(y) = -\frac{\sin y \cos y}{\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + 1}}$$

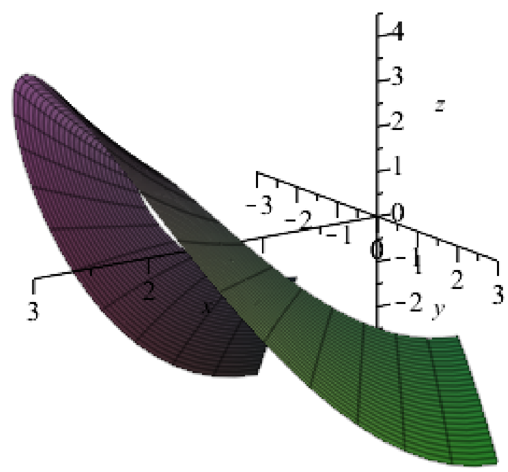
ovvero $c'(y) = 0, c(y) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Allora la famiglia delle primitive è

$$f(x, y) = \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + 1} + e^x + c \ , \ c \in \mathbb{R}.$$

b) Per quanto riguarda l'integrale $\int_\gamma \omega$, siamo nelle condizioni di applicare il teorema di integrazione delle forme differenziali lineari esatte, da cui abbiamo

$$\int_\gamma \omega = f(0, \frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2}, 0) = 1 - e^{\pi/2}.$$

2. La superficie Σ ha grafico dato da:



Essendo espressa in forma cartesiana, si ha

$$\begin{aligned} I &:= \int_\Sigma \frac{|z|}{|x+y|\sqrt{1+x^2+y^2}} dS = \iint_D \frac{|\frac{x^2-y^2}{2}|}{|x+y|\sqrt{1+x^2+y^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dxdy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \frac{|(x+y)(x-y)|}{|x+y|} dxdy = \frac{1}{2} \iint_D |x-y| dxdy. \end{aligned}$$

Data la forma di D, passiamo a coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}, \quad j(\theta, \rho) = \rho, \ dxdy = \rho d\rho d\theta$$

per cui D viene trasformato nel rettangolo $D' = [-\pi/2, \pi/2] \times [2, 3]$ e si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_2^3 |\rho\cos\theta - \rho\sin\theta| \rho d\rho \right) d\theta \underbrace{=}_{var.\,sep.;\,dom.\,rett.} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos\theta - \sin\theta| d\theta \right) \cdot \left(\int_2^3 \rho^2 d\rho \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_2^3 \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/4} (\cos\theta - \sin\theta) d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin\theta - \cos\theta) d\theta \right] = \\ &= \frac{19}{6} \left\{ [\sin\theta + \cos\theta]_{-\pi/2}^{\pi/4} - [\cos\theta + \sin\theta]_{\pi/4}^{\pi/2} \right\} = \frac{19}{3}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Analisi Matematica II - I esonero 18 Nov. 2018 - Compito A

Motivare tutti i passaggi

1) Studiare i massimi e i minimi assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 - 4y^2$ nell'insieme $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 + x^2 - 2y^2 - 8 \leq 0\}$. (12)

2) Data $f :]0,\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da: $f(x,y) := y \cdot \cot x$, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 2 \end{cases} \qquad (8)$$

3) Studiare convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\cos(\frac{2x}{n})}}{n+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (10)$$

Svolgimento

1) Osserviamo che

$$B \; := \; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 + x^2 - 2y^2 - 8 \leq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y^2-1)^2 + x^2 \leq 9\}$$

e dunque B è limitato, essendo $B \subset [-3,3] \times [-2,2]$. Inoltre, posto $h(x,y) := (y^2-1)^2 + x^2$ risulta $B = h^{-1}([0,9])$ e dunque B è chiuso per il teorema di continuità globale. B è allora compatto e dunque, essendo f continua, i massimi e minimi assoluti esistono per il teorema di Weierstrass. Tali punti non possono stare in $B^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 + x^2 - 2y^2 - 8 < 0\}$ perché in questo insieme (aperto) il gradiente di f si annulla solo nell'origine (che risulta un punto sella: basta esaminare le restrizioni $f(x,0)$ e $f(0,y)$); dunque tali punti devono stare sulla frontiera di B. Cerchiamoli con il metodo dello Jacobiano ed imponiamo il sistema

$$\begin{cases} y^4 + x^2 - 2y^2 = 8 \\ \\ \begin{vmatrix} 2x & -8y \\ 2x & 4y^3 - 4y \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^4 + x^2 - 2y^2 = 8 \\ 2x(4y^3 - 4y + 8y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^4 + x^2 - 2y^2 = 8 \\ 8xy(y^2+1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} y^4 - 2y^2 = 8 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} +x^2 = 8 \\ y = 0 \end{cases} \quad \iff \quad (0, \pm 2), (\pm 2\sqrt{2}, 0)$$

Risulta $f(0,\pm 2) = -16$, $f((\pm 2\sqrt{2}, 0) = 8$, pertanto i punti $(0,\pm 2)$ sono di minimo assoluto per f mentre i punti $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ sono di massimo assoluto.

2) L'equazione differenziale $y'(x) = y \cdot \cot x$ è a variabili separabili, dunque

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log(\sin x) + c = \log(k \sin x) \quad c = \log k, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

L'integrale generale della equazione differenziale è $|y| = k \sin x$; imponendo il dato iniziale si ottiene k=2.

3) La serie è a termini positivi, per le formule di bisezione e per note proprietà della funzione $t \mapsto \sin t$, risulta:

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{1-\cos(\frac{2x}{n})}}{n+x^2} = \sqrt{2}\frac{|\sin(\frac{x}{n})|}{n+x^2} \leq \frac{\sqrt{2}|x|}{n(n+x^2)} \sim \frac{1}{n^2}.$$

La convergenza assoluta dunque è immediata. Studiamo ora la convergenza totale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}|x|}{n(n+x^2)}$, se questa converge totalmente, allora converge totalmente e quindi anche uniformemente la serie di partenza. Calcoliamo $\sup_{x\geq 0} g_n(x)$ (g_n è pari). Siccome g_n è derivabile risulta

$$g_n'(x) = \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot \frac{n+x^2-2x^2}{(n+x^2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot \frac{n-x^2}{(n+x^2)^2} \geq 0 \quad \iff \quad 0 \leq x < \sqrt{n},$$

pertanto $\sup_{x\geq 0} g_n(x) = g_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{n^{3/2}}$. La serie data pertanto converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$.

Analisi Matematica II - I esonero 18 Nov. 2018 - Compito B

Motivare tutti i passaggi

1) Studiare i massimi e i minimi assoluti della funzione $f(x,y) = y^2 - 4x^2$ nell'insieme $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 - 2x^2 - 8 \le 0\}$. (12)

2) Data $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definita da: $f(x,y) := y(1+2y^2)$, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (8)$$

3) Studiare convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\cos(\frac{x}{n} - \frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{x}{n} + \frac{\pi}{2})\right]}{n + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (10)$$

Svolgimento

1) Osserviamo che

$$B \;:=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 - 2x^2 - 8 \le 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2-1)^2 + y^2 \le 9\}$$

e dunque B è limitato, essendo $B \subset [-2,2] \times [-3,3]$. Inoltre, posto $h(x,y) := (x^2-1)^2 + y^2$ risulta $B = h^{-1}([0,9])$ e dunque B è chiuso per il teorema di continuità globale. B è allora compatto e dunque, essendo f continua, i massimi e minimi assoluti esistono per il teorema di Weierstrass. Tali punti non possono stare in $B^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 - 2x^2 - 8 < 0\}$ perché in questo insieme (aperto) il gradiente di f si annulla solo nell'origine (che risulta un punto sella: basta esaminare le restrizioni $f(x,0)$ e $f(0,y)$); dunque tali punti devono stare sulla frontiera di B. Cerchiamoli con il metodo dello Jacobiano ed imponiamo il sistema

$$\begin{cases} x^4 + y^2 - 2x^2 = 8 \\ \\ \begin{vmatrix} -8x & 2y \\ 4x^3 - 4x & 2y \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^4 + y^2 - 2x^2 = 8 \\ 2y(4x^3 - 4x + 8x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^4 + y^2 - 2x^2 = 8 \\ 8xy(x^2+1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} x^4 - 2x^2 = 8 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} +y^2 = 8 \\ x = 0 \end{cases} \quad \iff \quad (\pm 2, 0), (0, \pm 2\sqrt{2}).$$

Risulta $f(\pm 2, 0) = -16$, $f(0, \pm 2\sqrt{2}) = 8$, pertanto i punti $(\pm 2, 0)$ sono di minimo assoluto per f mentre i punti $(0, \pm 2\sqrt{2})$ sono di massimo assoluto.

2) L'equazione differenziale $y'(x) = y(1+2y^2)$ è a variabili separabili, dunque

$$\int dx = x + c = \int \frac{dy}{y(1+2y^2)} = \int \frac{dy}{y} - \frac{1}{2} \int \frac{4y}{1+2y^2} dy = \log\left(\frac{y}{\sqrt{1+2y^2}}\right) \quad c \in \mathbb{R}$$

L'integrale generale della equazione differenziale è $x + c - \log\left(\dfrac{y}{\sqrt{1+2y^2}}\right) = 0$; imponendo il dato iniziale si ottiene $c = -\log(\sqrt{3})$. La soluzione cercata è dunque definita implicitamente da: $x - \log\left(\dfrac{\sqrt{3}y}{\sqrt{1+2y^2}}\right) = 0$. Tale funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Dini in un intorno di $(0,1)$ e dunque definisce, in tale intorno, implicitamente una funzione del tipo $y = y(x)$.

3) Consideriamo la serie dei valori assoluti. Per le formule di Werner e per note proprietà della funzione $t \mapsto \sin t$, risulta:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\left[\cos(\frac{x}{n} - \frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{x}{n} + \frac{\pi}{2})\right]}{n + x^2} \right| = \frac{2|\sin(\frac{x}{n})|}{n + x^2} \leq \frac{2|x|}{n(n+x^2)} \sim \frac{1}{n^2}.$$

La convergenza assoluta dunque è immediata. Studiamo ora la convergenza totale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2|x|}{n(n+x^2)}$, se questa converge totalmente, allora converge totalmente e quindi anche uniformemente la serie di partenza. Calcoliamo $\sup_{x \geq 0} g_n(x)$ (g_n è pari). Siccome g_n è derivabile risulta

$$g_n'(x) = \frac{2}{n} \cdot \frac{n + x^2 - 2x^2}{(n+x^2)^2} = \frac{2}{n} \cdot \frac{n - x^2}{(n+x^2)^2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x < \sqrt{n},$$

pertanto $\sup_{x \geq 0} g_n(x) = g_n(\sqrt{n}) = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. La serie data pertanto converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$.

Analisi Matematica II - II esonero 17 Dic. 2018 - Compito A

Motivare tutti i passaggi

1) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_A \frac{x}{x^2+z^2}dxdydz \qquad (12)$$

ove $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2-y^2+z^2 \le 0, x,y,z \ge 0\}$.

2) Si consideri la forma differenziale

$$\omega := \frac{2y}{2x+y}dx + \left(\log(2x+y) + \frac{y}{2x+y}\right)dy, \qquad (10)$$

dire se è esatta nel suo insieme di definizione. Se la risposta è positiva, determinare le primitive che nel punto (1,0) assumono il valore π.

3) Risolvere in almeno due modi diversi il seguente integrale

$$\int_{+\partial\Sigma} (z^3-y)dx + z^2dy + (y+x)dz \qquad (10)$$

ove $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2-x^2-y^2,\ x^2+y^2 \le 2\}$ e $+\partial\Sigma$ è il suo bordo percorso nel verso positivo, dopo aver provato che tale curva è regolare.

Svolgimento

1) Scriviamo l'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2-y^2+z^2 \le 0, x,y,z \ge 0\}$ in coordinate sferiche, prendendo come piano di riferimento il piano xz e prendendo come coordinata della quota la y, cioè

$$\begin{cases} x = \rho\sin t\cos\phi \\ z = \rho\sin t\sin\phi \\ y = \rho\cos t \end{cases} \qquad \rho \ge 0, t \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi] \quad dxdydz = \rho^2\sin t\, d\rho dt d\phi.$$

In base alle disuguaglianze date, se $t \in [0,\pi]$, si ha:

$$\begin{aligned} &1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, \Longleftrightarrow 1 \le \rho \le 2, \\ &x^2-y^2+z^2 \le 0, \Longleftrightarrow \sin^2 t - \cos^2 t \le 0 \Longleftrightarrow t \in [0,\frac{\pi}{4}] \\ &y \ge 0 \Longleftrightarrow \cos t \ge 0 \Longleftrightarrow t \in [0,\frac{\pi}{2}] \\ &x,z \ge 0 \Longleftrightarrow \phi \in [0,\frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

Pertanto l'insieme A in coordinate sferiche si esprime nella seguente forma: $\{(\rho,t,\phi) : \rho \in [1,2], t \in [0,\frac{\pi}{4}], \phi \in [0,2\pi]\}$. Pertanto

$$\begin{aligned} \iiint_A \frac{x}{x^2+z^2}dxdydz &= \int_1^2 d\rho \int_0^{\pi/4} dt \int_0^{\pi/2} \frac{\rho\sin t\cos\phi}{\rho^2\sin^2 t}\rho^2\sin t\, d\phi = \\ &= \left(\int_1^2 \rho d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/4} dt\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\phi\, d\phi\right) = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$

2) La forma differenziale lineare

$$\omega := \frac{2y}{2x+y}dx + \left(\log(2x+y) + \frac{y}{2x+y}\right) dy$$

è definita nell'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+y > -2x\}$ che è un semipiano aperto, dunque connesso e privo di buchi. Siccome $\omega \in C^1(E)$ allora la chiusura e l'esattezza di ω saranno equivalenti (E è privo di buchi e dunque semplicemente connesso). Visto che già sappiamo che le funzioni componenti sono di classe C^1 basterà provare che $X'_y = Y'_x$. Risulta

$$\begin{aligned} X'_y &= \frac{4x}{(2x+y)^2} \\ Y'_x &= \frac{2}{2x+y} - \frac{2y}{(2x+y)^2} = \frac{4x}{(2x+y)^2}. \end{aligned}$$

Dunque, per quanto detto sopra ω è esatta e possiamo calcolare la classe delle sue primitive partendo proprio dal punto $(1,0) \in E$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^y \left(\log(2x+t) + \frac{t}{2x+t}\right) dt + c = [t\log(2x+t)]_{t=0}^{t=y} - \int_0^y \frac{t}{2x+t}dt + \int_0^y \frac{t}{2x+t}dt + c = \\ &= y\log(2x+y) + c. \end{aligned}$$

La primitiva cercata è $y\log(2x+y) + \pi$.

3) $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2,\, x^2+y^2 \leq 2\}$ è una porzione di paraboloide e $+\partial\Sigma$ è la circonferenza $\{(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi\}$. (Tale curva è chiusa, semplice, di classe $C^1([0,2\pi])$ ed inoltre $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = 2$.) La forma differenziale lineare $\omega = (z^3 - y)dx + z^2dy + (y+x)dz$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$, ma

$$\nabla \times (z^3 - y, z^2, y+x) = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (z^3-y) & z^2 & (y+x) \end{array} \right| = (1-2z, 3z^2-1, 1),$$

quindi non può essere chiusa e dunque esatta (visto che $\omega \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ed $\mathbb{R}^3$ è un convesso l'esattezza e la chiusura sono equivalenti). L'integrale dunque va calcolato direttamente.

$$\begin{aligned} \int_{+\partial\Sigma} (z^3-y)dx + z^2dy + (y+x)dz &= \int_0^{2\pi} +2\sin^2 t dt = 8\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= 8\int_0^{\pi/2} \sin t(-\cos t)' dt = 2\pi \end{aligned}$$

dato che

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \sin t(-\cos t)' dt = [-\sin t\cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt.$$

Utilizziamo ora il Teorema di Stokes per per calcolare l'integrale. Osserviamo inoltre che $+\partial\Sigma$ è anche il bordo della superficie piana $A := \{(x,y,0) : x^2+y^2 \leq 2\}$ che è orientabile, dotata di bordo, di classe C^2 ed ammette in ogni punto normale $(0,0,1)$. Pertanto

$$\int_{+\partial\Sigma} (z^3-y)dx + z^2dy + (y+x)dz = \iint_A (1-2z, 3z^2-1, 1) \times (0,0,1)dxdy = \iint_A dxdy = 2\pi.$$

Analisi Matematica II - II esonero 17 Dic. 2018 - Compito B

Motivare tutti i passaggi

1) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_A \frac{y}{x^2+z^2}dxdydz \qquad (12)$$

ove $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2-y^2+z^2 \le 0, x,y,z \ge 0\}$.

2) Risolvere in almeno due modi diversi il seguente integrale

$$\int_{+\partial\Sigma} (z^3-y)dx + z^2dy + (y+x)dz \qquad (10)$$

ove $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1-x^2-y^2,\ x^2+y^2 \le 1\}$ e $+\partial\Sigma$ è il suo bordo percorso nel verso positivo, dopo aver provato che tale curva è regolare.

3) Si consideri la forma differenziale

$$\omega := \frac{2y}{2x+y}dx + \left(\log(2x+y) + \frac{y}{2x+y}\right)dy, \qquad (10)$$

dire se è esatta nel suo insieme di definizione. Se la risposta è positiva, determinare le primitive che nel punto (1,0) assumono il valore $\sqrt{2}$.

Svolgimento

1) Scriviamo l'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2-y^2+z^2 \le 0, x,y,z \ge 0\}$ in coordinate sferiche, prendendo come piano di riferimento il piano xz e prendendo come coordinata della quota la y, cioè

$$\begin{cases} x = \rho\sin t\cos\phi \\ z = \rho\sin t\sin\phi \\ y = \rho\cos t \end{cases} \qquad \rho \ge 0, t \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi] \quad dxdydz = \rho^2 \sin t\, d\rho dt d\phi.$$

In base alle disuguaglianze date, se $t \in [0,\pi]$, si ha:

$$\begin{aligned} &1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, \Longleftrightarrow 1 \le \rho \le 2, \\ &x^2-y^2+z^2 \le 0, \Longleftrightarrow \sin^2 t - \cos^2 t \le 0 \Longleftrightarrow t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ &y \ge 0 \Longleftrightarrow \cos t \ge 0 \Longleftrightarrow t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ &x, z \ge 0 \Longleftrightarrow \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

Pertanto l'insieme A in coordinate sferiche si esprime nella seguente forma: $\{(\rho,t,\phi) : \rho \in [1,2], t \in [0, \frac{\pi}{4}], \phi \in [0,2\pi]\}$. Pertanto

$$\begin{aligned} \iiint_A \frac{y}{x^2+z^2}dxdydz &= \int_1^2 d\rho \int_0^{\pi/4} dt \int_0^{\pi/2} \frac{\rho\sin t\sin\phi}{\rho^2\sin^2 t}\rho^2 \sin t\, d\phi = \\ &= \left(\int_1^2 \rho d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/4} dt\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin\phi\, d\phi\right) = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$

2) $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ è una porzione di paraboloide e $+\partial\Sigma$ è la circonferenza $\{(\cos t, \sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi\}$. (Tale curva è chiusa, semplice, di classe $C^1([0,2\pi])$ ed inoltre $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = 1$.) La forma differenziale lineare $\omega = (z^3 - y)dx + z^2 dy + (y+x)dz$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$, ma

$$\nabla \times (z^3 - y, z^2, y + x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (z^3 - y) & z^2 & (y+x) \end{vmatrix} = (1 - 2z, 3z^2 - 1, 1),$$

quindi non può essere chiusa e dunque esatta (visto che $\omega \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ed $\mathbb{R}^3$ è un convesso l'esattezza e la chiusura sono equivalenti). L'integrale dunque va calcolato direttamente.

$$\begin{aligned} \int_{+\partial\Sigma} (z^3 - y)dx + z^2 dy + (y+x)dz &= \int_0^{2\pi} + \sin^2 t dt = 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sin t (-\cos t)' dt = \pi \end{aligned}$$

dato che

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt \quad = \quad \int_0^{\pi/2} \sin t(-\cos t)' dt = [-\sin t \cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt.$$

Utilizziamo ora il Teorema di Stokes per per calcolare l'integrale. Osserviamo inoltre che $+\partial\Sigma$ è anche il bordo della superficie piana $A := \{(x,y,0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ che è orientabile, dotata di bordo, di classe C^2 ed ammette in ogni punto normale $(0,0,1)$. Pertanto

$$\int_{+\partial\Sigma} (z^3 - y)dx + z^2 dy + (y+x)dz = \iint_A (1 - 2z, 3z^2 - 1, 1) \times (0,0,1) dxdy = \iint_A dxdy = \pi.$$

3) La forma differenziale lineare

$$\omega := \frac{2y}{2x+y} dx + \left(\log(2x+y) + \frac{y}{2x+y}\right) dy$$

è definita nell'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > -2x\}$ che è un semipiano aperto, dunque connesso e privo di buchi. Siccome $\omega \in C^1(E)$ allora la chiusura e l'esattezza di ω saranno equivalenti (E è privo di buchi e dunque semplicemente connesso). Visto che già sappiamo che le funzioni componenti sono di classe C^1 basterà provare che $X'_y = Y'_x$. Risulta

$$\begin{aligned} X'_y &= \frac{4x}{(2x+y)^2} \\ Y'_x &= \frac{2}{2x+y} - \frac{2y}{(2x+y)^2} = \frac{4x}{(2x+y)^2}. \end{aligned}$$

Dunque, per quanto detto sopra ω è esatta e possiamo calcolare la classe delle sue primitive partendo proprio dal punto $(1,0) \in E$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^y \left(\log(2x+t) + \frac{t}{2x+t}\right) dt + c = [t\log(2x+t)]_{t=0}^{t=y} - \int_0^y \frac{t}{2x+t} dt + \int_0^y \frac{t}{2x+t} dt + c = \\ &= y\log(2x+y) + c. \end{aligned}$$

La primitiva cercata è $y\log(2x+y) + \sqrt{2}$.

Compito A

Matematica 2 (Meccanica) - I esonero - 15 Aprile 2019

---

1. Data la funzione $f(x, y) = |x|(x^2 + 2y^2 - 4)$ studiarne segno, derivabilità parziale e massimi e minimi relativi.

2. Studiare la convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{|x|}{1+x^2} \right)^n .$$

Cenni di soluzione

1. La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è ivi continua. È anche simmetrica sia rispetto alla x che alla y in quanto $f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y)$. Inoltre si annulla per $x = 0$ e per $x^2 + 2y^2 = 4$ (ellisse di semiassi $a = 2, b = \sqrt{2}$). Lo studio del segno è semplice in quanto

   - $f = 0$ nei punti $A := \{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\} \cup \{(2\cos t, \sqrt{2}\sin t),\ t \in [0, 2\pi]\}$;
   - $f > 0$ nei punti $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A :\ x^2 + 2y^2 > 4\}$;
   - $f < 0$ nei punti $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A :\ x^2 + 2y^2 < 4\}$.

   Lo studio del segno ci permette inoltre di dire che:

   - i punti $(0, y)$ con $|y| < \sqrt{2}$ sono tutti di massimo relativo per f;
   - quelli $(0, y)$ con $|y| > \sqrt{2}$ sono di minimo relativo per f;
   - i punti $(0, \pm\sqrt{2})$ non possono essere né di massimo né di minimo relativo perché $f(0, \pm\sqrt{2}) = 0$ e in ogni loro intorno cadono punti in cui la funzione assume valori sia positivi che negativi.

   Studiamo ora la derivabilità parziale della funzione f. Risulta

$$f(x, y) = \begin{cases} x(x^2 + 2y^2 - 4) & x \geq 0 \\ -x(x^2 + 2y^2 - 4) & x < 0 \end{cases}$$

   Nel semipiano $x > 0$ la f è un polinomio e quindi possiamo applicare le regole di derivazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 4 + 2y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4xy.$$

   Lo stesso discorso si può ripetere se $x < 0$ e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -3x^2 + 4 - 2y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4xy.$$

Nei punti in cui $x = 0$ c'è un cambio di legge e quindi dobbiamo applicare la definizione di derivabilità. Iniziamo con il punto $(0,0)$:

$$\forall x \neq 0,\ \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{|x|(x^2-4)}{x} \qquad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|(x^2-4)}{x} = \mp 4 \Longrightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\forall y \neq 0,\ \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \qquad \lim_{y\to 0^\pm} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Consideriamo ora in punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$.

$$\forall x \neq 0, \qquad \frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x} = \frac{|x|(x^2+2y_0^2-4)}{x} \qquad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|(x^2+2y_0^2-4)}{x} = \pm(2y_0^2-4)$$

$$\Longrightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) \text{ se } y_0 \neq \pm\sqrt{2},\ \text{mentre } \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pm\sqrt{2}) = 0;$$

$$\forall k \neq 0, \qquad \frac{f(0,y_0+k)-f(0,y_0)}{k} = 0 \qquad \lim_{k\to 0^\pm} \frac{f(0,y_0+k)-f(0,y_0)}{k} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = 0.$$

Ricapitolando

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e vale $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4|x|y$, mentre
- $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) :\ y \neq \pm\sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$ e vale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = segno(x)(3x^2-4+2y^2) = \begin{cases} 3x^2-4+2y^2 & x>0 \\ -3x^2+4-2y^2 & x<0 \\ 0 & (xy) = (0 \pm \sqrt{2}). \end{cases}$$

I punti $(0, \pm\sqrt{2})$ saranno critici e, per lo studio del segno, possiamo dire che sono punti sella. Procediamo ora con lo studio dei punti di massimo e di minimo relativo (i punti dell'asse delle y sono stati già esaminati). Studiamo pertanto $\nabla f = (0,0)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) :\ y \in \mathbb{R}\}$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2-4+2y^2 = 0 \\ 4|x|y = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0, x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Siccome f è pari rispetto alla x basta studiare la natura del punto $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$ che si trova nel semipiano $x > 0$. In tale insieme f (polinomio) è sicuramente di classe $C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ e quindi possiamo applicare il metodo della matrice Hessiana. Risulta per ogni $x > 0$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix} \quad detH(x,y) = 24x^2 - 16y^2,\ detH(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0) > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0) > 0$$

I due punti sono dunque di minimo.

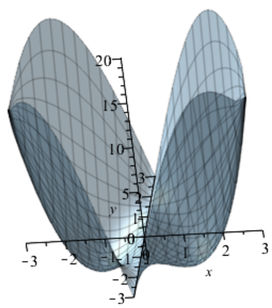
Ricapitolando: i punti: $(0,y)$ **con** $|y| > \sqrt{2}$ **e** $(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$ **sono di minimo relativo,** $(0,y)$ **con** $|y| < \sqrt{2}$ **sono di massimo relativo e** $(0, \pm\sqrt{2})$ **sono punti sella.**

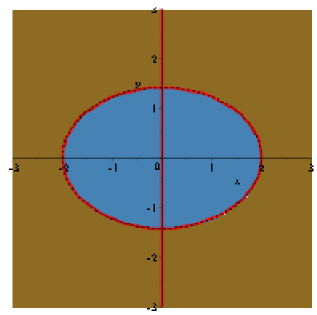
Una ulteriore precisazione sui punti $(0, \pm\sqrt{2})$: tali punti **non possono essere studiati attraverso la matrice Hessiana**, infatti non esiste $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, \pm\sqrt{2}) := \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, \pm\sqrt{2})\right)$. Tale derivata mista va calcolata attraverso il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{k\to 0^\pm} \frac{f'_x(0,\sqrt{2}+k) - f'_x(0,\sqrt{2})}{k}; \qquad \lim_{k\to 0^\pm} \frac{f'_x(0,-\sqrt{2}+k) - f'_x(0,-\sqrt{2})}{k}$$

ma il primo addendo del numeratore non esiste per ogni $k \neq 0$. È pertanto assolutamente sbagliato valutare $H(0, \pm\sqrt{2})$!!

Il grafico della funzione valutata nei punti $x^2 + y^2 \leq 9$ ed il segno di f nel quadrato $[-3, 3]^2$ sono riportati in figura:





2. È una serie di potenze a termini positivi, quindi o converge o diverge. Visto che il termine generale della serie è una funzione pari basterà studiarla in $\mathbb{R}_0^+$. Imponiamo la sostituzione $\left(\dfrac{|x|}{1+x^2}\right) = y \geq 0$. La serie di potenze diventa allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} y^n.$$

Se $y = 0$ allora $f_n(0) = 0$ per ogni n e quindi la serie converge e $s(0) = 0$. Se invece $y \neq 0$ applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)y^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{ny^n} = y.$$

Poichè $y := \dfrac{|x|}{1+x^2} < 1$ (infatti questa disuguaglianza equivale a $x^2 - |x| + 1 > 0$ che ha $\Delta < 0$ e quindi assume sempre segno positivo), la serie converge assolutamente su tutto $\mathbb{R}$ ($r = +\infty$); proviamo che ivi converge anche totalmente, infatti:

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| &= \sup_{\mathbb{R}} \frac{n}{n+1} \left(\frac{|x|}{1+x^2}\right)^n = \sup_{x>0} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n = \frac{n}{n+1} \sup_{x>0} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n = \\
&= \frac{n}{n+1} \left(\sup_{x>0} \frac{x}{1+x^2}\right)^n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| &< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.
\end{aligned}$$

Calcoliamo la somma della serie utilizzando ancora la sostituzione $\left(\dfrac{|x|}{1+x^2}\right) = y$ per semplicità. Iniziamo con $y > 0$.

$$\begin{aligned}
s(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-1}{n+1} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} y^n = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{y} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m} \\
&= \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} \log(1-y).
\end{aligned}$$

Se invece $y = 0$ allora $s(0) = 0$. Riapplicando la sostituzione $\left(\frac{|x|}{1+x^2}\right) = y$ si perviene alla somma della serie nell'insieme $\mathbb{R}$

$$s(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \\ \dfrac{x^2+1}{1+x^2-|x|} + \dfrac{x^2+1}{|x|}\log\left(1 - \dfrac{|x|}{1+x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}$$

$(\lim_{x\to 0} s(x) = 0)$

La somma della serie poteva essere calcolata, in maniera più lunga, anche facendo uso dei teoremi di derivazione ed integrazione per serie, nel caso $y > 0$:

$$\begin{aligned} s(y) &= \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty} n\int_0^y t^n dt = \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^y nt^n dt = \\ &= \frac{1}{y}\int_0^y \left(\sum_{n=0}^{\infty} nt^n\right) dt = \frac{1}{y}\int_0^y \left(t\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}\right) dt = \frac{1}{y}\int_0^y \left(t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}t^n\right) dt = \\ &= \frac{1}{y}\int_0^y \left(t\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt = \frac{1}{y}\int_0^y \left(t\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t}\right) dt = \frac{1}{y}\int_0^y \frac{t}{(1-t)^2}dt = \\ &= \frac{1}{y}\int_0^y \frac{t}{(t-1)^2}dt = \frac{1}{y}\int_0^y \frac{t-1+1}{(t-1)^2}dt = \frac{1}{y}\int_0^y \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\right) dt = \\ &= \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y}\log(1-y). \end{aligned}$$

Compito B

Matematica 2 (Meccanica) - I esonero 15 Aprile 2019

1. Data la funzione $f(x,y) = |x|(2x^2 + y^2 - 4)$ studiarne segno, derivabilità parziale e massimi e minimi relativi.

2. Studiare la convergenza e la somma della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\log(1+x^2)\right)^n .$$

Cenni di soluzione

1. La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è ivi continua. È anche simmetrica sia rispetto alla x che alla y in quanto $f(-x,y) = f(x,y) = f(x,-y)$. Inoltre si annulla per $x = 0$ e per $2x^2 + y^2 = 4$ (ellisse di semiassi $a = \sqrt{2}, b = 2$). Lo studio del segno è semplice in quanto

   - $f = 0$ nei punti $A := \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\} \cup \{(\sqrt{2}\cos t, 2\sin t),\ t \in [0, 2\pi]\}$;
   - $f > 0$ nei punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A :\ 2x^2 + y^2 > 4\}$;
   - $f < 0$ nei punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A :\ 2x^2 + y^2 < 4\}$.

   Lo studio del segno ci permette inoltre di dire che:

   - i punti $(0,y)$ con $|y| < 2$ sono tutti di massimo relativo per f;
   - quelli $(0,y)$ con $|y| > 2$ sono di minimo relativo per f;
   - punti $(0,\pm 2)$ non possono essere né di massimo né di minimo relativo perché $f(0,\pm 2) = 0$ e in ogni loro intorno cadono punti in cui la funzione assume valori sia positivi che negativi.

   Studiamo ora la derivabilità parziale della funzione f. Risulta
$$f(x,y) = \begin{cases} x(2x^2 + y^2 - 4) & x \geq 0 \\ -x(2x^2 + y^2 - 4) & x < 0 \end{cases}$$

   Nel semipiano $x > 0$ la f è un polinomio e quindi possiamo applicare le regole di derivazione:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 4 + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

   Lo stesso discorso si può ripetere se $x < 0$ e quindi
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6x^2 + 4 - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2xy.$$

Nei punti in cui $x = 0$ c'è un cambio di legge e quindi dobbiamo applicare la definizione di derivabilità. Iniziamo con il punto $(0,0)$:

$$\forall x \neq 0,\ \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{|x|(2x^2-4)}{x} \quad \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{|x|2(x^2-4)}{x} = \mp 4 \Longrightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$
$$\forall y \neq 0,\ \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \quad \lim_{y\to 0^{\pm}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Consideriamo ora in punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$.

$$\forall x \neq 0,\ \frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x} = \frac{|x|(2x^2+y_0^2-4)}{x} \quad \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{|x|(2x^2+y_0^2-4)}{x} = \pm(y_0^2-4)$$
$$\Longrightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) \text{ se } y_0 \neq \pm 2,\ \text{mentre } \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pm 2) = 0;$$
$$\forall k \neq 0,\ \frac{f(0,y_0+k)-f(0,y_0)}{k} = 0 \quad \lim_{k\to 0^{\pm}} \frac{f(0,y_0+k)-f(0,y_0)}{k} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = 0.$$

Ricapitolando:

- $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e vale $\frac{\partial f}{\partial y} = 2|x|y$, mentre
- $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \neq \pm\sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$ e vale $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = segno(x)(6x^2-4+y^2)$.

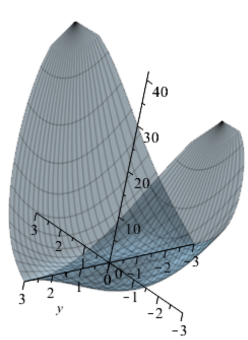
I punti $(0,\pm 2)$ saranno critici e, per lo studio del segno, possiamo dire che sono punti sella. Procediamo ora con lo studio dei punti di massimo e di minimo relativo quando $x \neq 0$. Studiamo pertanto $\nabla f = (0,0)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 6x^2 - 4 + y^2 = 0 \\ 2|x|y = 0 \end{cases} \iff y = 0, x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Siccome f è pari rispetto alla x basta studiare la natura del punto $(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$ che si trova nel semipiano $x > 0$. In tale insieme f (polinomio) è sicuramente di classe C^2 e quindi possiamo applicare il metodo della matrice Hessiana. Risulta per ogni $x > 0$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad detH(x,y) = 12x^2 - 4y^2 \; detH(\frac{\sqrt{6}}{3},0) > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\sqrt{6}}{3},0) > 0 \Longrightarrow \text{ punto di minimo}$$

In grafico della funzione valutata nei punti $x^2 + y^2 \leq 9$ è riportato in figura:



2. È una serie di potenze a termini positivi, quindi o converge o diverge. Visto che il termine generale della serie è una funzione pari basterà studiarla in $\mathbb{R}_0^+$. Imponiamo la sostituzione $\log(1+x^2) = y \geq 0$. La serie di potenze diventa allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} y^n.$$

Se $y = 0$ allora $f_n(0) = 0$ per ogni n e quindi la serie converge e $s(0) = 0$. Se invece $y \neq 0$ applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)y^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{ny^n} = y.$$

Poiché $y := \log(1+x^2) < 1$ se e solo se $|x| < \sqrt{e-1}$, la serie converge assolutamente in tale insieme e totalmente in ogni intervallo $[-\rho, \rho], 0 < \rho < \sqrt{e-1}$. La convergenza non è uniforme in $[0, \sqrt{e-1}[$ perché se lo fosse, per il criterio di Cauchy risulterebbe:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che: per ogni $n \geq \overline{n}$ e per ogni $p \in \mathbb{N} \Rightarrow$ (facendo il limite per $x \to \sqrt{e-1}^-$)

$$\frac{n}{n+1} + \ldots + \frac{n+p}{n+p+1} \leq \varepsilon$$

e si otterrebbe la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$.
Resta ora da calcolare la somma della serie. Se $y = 0$ $s(0) = 0$, supponiamo allora $y \neq 0$, ricordando che le serie di potenze si possono sempre derivare ed integrare per serie sia $y \in [0,1[$ e consideriamo l'intervallo $[0, y]$. Calcoliamo la somma della serie utilizzando ancora la sostituzione $\log(1+x^2) = y$ per semplicità. Iniziamo con $y > 0$.

$$\begin{aligned} s(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-1}{n+1} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} y^n = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{y} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m} \\ &= \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} \log(1-y). \end{aligned}$$

Riapplicando la sostituzione $\log(1+x^2) = y$ la somma della serie è data da:

$$s(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{1}{\log(1+x^2)} \log\big(1 - \log(1+x^2)\big) + \dfrac{1}{1-\log(1+x^2)} & x \neq 0 \end{cases}$$

Compito C

Matematica 2 (Meccanica) - I esonero 15 Aprile 2019

1. Data la funzione $f(x,y) = |y|(2x^2 + 3y^2 - 6)$ studiarne segno, derivabilità parziale e massimi e minimi relativi.

2. Studiare la convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{\pi} \arctan(x^2) \right)^n .$$

Cenni di soluzione

1. La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è ivi continua. È anche simmetrica sia rispetto alla x che alla y in quanto $f(-x,y) = f(x,y) = f(x,-y)$. Inoltre si annulla per $y = 0$ e per $2x^2 + 3y^2 = 6$ (ellisse di semiassi $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}$). Lo studio del segno è semplice in quanto

   - $f = 0$ nei punti $A := \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(\sqrt{3}\cos t, \sqrt{2}\sin t),\ t \in [0, 2\pi]\}$;
   - $f > 0$ nei punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A :\ 2x^2 + 3y^2 > 6\}$;
   - $f < 0$ nei punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A :\ 2x^2 + 3y^2 < 6\}$.

   Lo studio del segno ci permette inoltre di dire che:

   - i punti $(x,0)$ con $|x| < \sqrt{3}$ sono tutti di massimo relativo per f;
   - quelli $(x,0)$ con $|x| > \sqrt{3}$ sono di minimo relativo per f;
   - i punti $(\pm\sqrt{3}, 0)$ non possono essere né di massimo né di minimo relativo perché $f(\pm\sqrt{3}, 0) = 0$ e in ogni loro intorno cadono punti in cui la funzione assume valori sia positivi che negativi.

   Studiamo ora la derivabilità parziale della funzione f. Risulta

$$f(x,y) = \begin{cases} y(2x^2 + 3y^2 - 6) & y \geq 0 \\ -y(2x^2 + 3y^2 - 6) & y < 0 \end{cases}$$

   Nel semipiano $y > 0$ la f è un polinomio e quindi possiamo applicare le regole di derivazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 9y^2 - 6.$$

   Lo stesso discorso si può ripetere se $y < 0$ e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6 - 2x^2 - 9y^2.$$

Nei punti in cui $y = 0$ c'è un cambio di legge e quindi dobbiamo applicare la definizione di derivabilità. Iniziamo con il punto $(0,0)$:

$$\forall x \neq 0,\ \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \quad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$
$$\forall y \neq 0,\ \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \quad \lim_{y\to 0^\pm} \frac{|y|(3y^2-6)}{y} = \mp 6 \Longrightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Consideriamo ora in punti $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$.

$$\forall h \neq 0,\ \frac{f(x_0+h,0)-f(x_0,0)}{h} = 0, \quad \lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x_0+h,0)-f(x_0,0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$$
$$\forall k \neq 0,\ \frac{f(x_0,k)-f(x_0,0)}{k} = \frac{|k|(2x_0^2+3k^2-6)}{k}, \quad \lim_{k\to 0^\pm} \frac{|k|(2x_0^2+3k^2-6)}{k} = \pm(2x_0^2-6)$$
$$\Longrightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) \text{ se } x_0 \neq \pm\sqrt{3}, \text{ mentre } \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pm\sqrt{3}) = 0;$$

Ricapitolando:

- $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e vale $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x|y|$, mentre
- $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \neq \pm\sqrt{3}\} \to \mathbb{R}$ e vale $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = segno(y)(2x^2-6+9y^2)$.

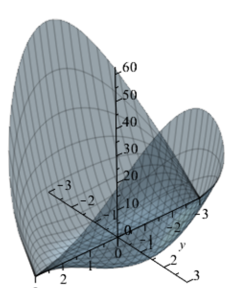
I punti $(\pm\sqrt{3}, 0)$ saranno critici e, per lo studio del segno, possiamo dire che sono punti sella. Procediamo ora con lo studio dei punti di massimo e di minimo relativo peri quali $y \neq 0$. Studiamo pertanto $\nabla f = (0,0)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x|y| = 0 \\ 2x^2 - 6 + 9y^2 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Siccome f è pari rispetto alla x basta studiare la natura del punto $(0, \sqrt{3}/3)$ che si trova nel semipiano $y > 0$. In tale insieme f (polinomio) è sicuramente di classe C^2 e quindi possiamo applicare il metodo della matrice Hessiana. Risulta per ogni $y > 0$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x \\ 4x & 18y \end{pmatrix} \quad detH(x,y) = 72y^2 - 16x^2\ detH(0, \frac{\sqrt{3}}{3}) > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \frac{\sqrt{3}}{3}) > 0 \Longrightarrow \text{ punto di minimo}$$

In grafico della funzione valutata nei punti $x^2 + y^2 \leq 9$ è riportato in figura:



2. È una serie di potenze a termini positivi, quindi o converge o diverge. Visto che il termine generale della serie è una funzione pari basterà studiarla in $\mathbb{R}_0^+$. Imponiamo la sostituzione $\frac{1}{\pi}\arctan x^2 = y \geq 0$. La serie di potenze diventa allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} y^n.$$

Se $y = 0$ allora $f_n(0) = 0$ per ogni n e quindi la serie converge e $s(0) = 0$. Se invece $y \neq 0$ applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)y^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{ny^n} = y.$$

Poiché $0 \leq y := \frac{1}{\pi}\arctan x^2 < \frac{1}{2} < 1$ la serie converge assolutamente su $\mathbb{R}$; proviamo che ivi converge anche totalmente, infatti:

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| &= \sup_{\mathbb{R}} \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{\pi}\arctan x^2\right)^n = \sup_{x>0} \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{\pi}\arctan x^2\right)^n = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| &< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.\end{aligned}$$

Calcoliamo la somma della serie utilizzando ancora la sostituzione $\left(\frac{1}{\pi}\arctan x^2\right) = y$ per semplicità. Se $y > 0$

$$\begin{aligned} s(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-1}{n+1} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} y^n = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{y}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m} \\ &= \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y}\log(1-y).\end{aligned}$$

Se invece $y = 0$ allora $s(0) = 0$. Riapplicando la sostituzione $\left(\frac{1}{\pi}\arctan x^2\right) = y$ si perviene alla somma della serie nell'insieme $\mathbb{R}$

$$s(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{\pi}{\arctan x^2}\log\left(1 - \dfrac{1}{\pi}\arctan x^2\right) + \dfrac{\pi}{\pi - \arctan x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

Compito D

Matematica 2 (Meccanica) - I esonero 15 Aprile 2019

1. Data la funzione $f(x,y) = |y|(3x^2 + 2y^2 - 6)$ studiarne segno, derivabilità parziale e massimi e minimi relativi.

2. Studiare la convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n .$$

Cenni di soluzione

1. La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è ivi continua. È anche simmetrica sia rispetto alla x che alla y in quanto $f(-x,y) = f(x,y) = f(x,-y)$. Inoltre si annulla per $y = 0$ e per $3x^2 + 2y^2 = 6$ (ellisse di semiassi $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}$). Lo studio del segno è semplice in quanto

   - $f = 0$ nei punti $A := \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{3}\sin t),\ t \in [0, 2\pi]\}$;
   - $f > 0$ nei punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A :\ 3x^2 + 2y^2 > 6\}$;
   - $f < 0$ nei punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A :\ 3x^2 + 3y^2 < 6\}$.

   Lo studio del segno ci permette inoltre di dire che:

   - i punti $(x,0)$ con $|x| < \sqrt{2}$ sono tutti di massimo relativo per f;
   - quelli $(x,0)$ con $|x| > \sqrt{2}$ sono di minimo relativo per f;
   - punti $(\pm\sqrt{2}, 0)$ non possono essere né di massimo né di minimo relativo perché $f(\pm\sqrt{2}, 0) = 0$ e in ogni loro intorno cadono punti in cui la funzione assume valori sia positivi che negativi.

   Studiamo ora la derivabilità parziale della funzione f. Risulta

$$f(x,y) = \begin{cases} y(3x^2 + 2y^2 - 6) & y \geq 0 \\ -y(3x^2 + 2y^2 - 6) & y < 0 \end{cases}$$

   Nel semipiano $y > 0$ la f è un polinomio e quindi possiamo applicare le regole di derivazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + 6y^2 - 6.$$

   Lo stesso discorso si può ripetere se $y < 0$ e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6 - 3x^2 - 6y^2.$$

Nei punti in cui $y = 0$ c'è un cambio di legge e quindi dobbiamo applicare la definizione di derivabilità. Iniziamo con il punto $(0, 0)$:

$$\forall x \neq 0,\ \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \quad \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$
$$\forall y \neq 0,\ \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \quad \lim_{y \to 0^{\pm}} \frac{|y|(2y^2 - 6)}{y} = \mp 6 \Longrightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Consideriamo ora in punti $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$.

$$\forall h \neq 0,\ \frac{f(x_0 + h, 0) - f(x_0, 0)}{h} = 0, \quad \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x_0 + h, 0) - f(x_0, 0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$$
$$\forall k \neq 0,\ \frac{f(x_0, k) - f(x_0, 0)}{k} = \frac{|k|(3x_0^2 + 2k^2 - 6)}{k}, \quad \lim_{k \to 0^{\pm}} \frac{|k|(3x_0^2 + 2k^2 - 6)}{k} = \pm(3x_0^2 - 6)$$
$$\Longrightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) \text{ se } x_0 \neq \pm\sqrt{2}, \text{ mentre } \frac{\partial f}{\partial x}(0, \pm\sqrt{2}) = 0;$$

Ricapitolando:

- $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e vale $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x|y|$, mentre
- $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \neq \pm\sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$ e vale $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = segno(y)(3x^2 - 6 + 6y^2)$.

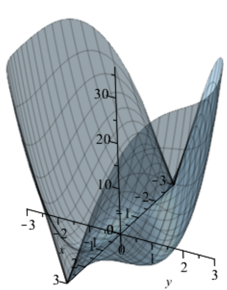
I punti $(\pm\sqrt{2}, 0)$ saranno critici e, per lo studio del segno, possiamo dire che sono punti sella. Procediamo ora con lo studio dei punti di massimo e di minimo relativo per cui $y \neq 0$. Studiamo pertanto $\nabla f = (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 6x|y| = 0 \\ 3x^2 - 6 + 6y^2 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, y = \pm 1.$$

Siccome f è pari rispetto alla x basta studiare la natura del punto $(0, 1)$ che si trova nel semipiano $y > 0$. In tale insieme f (polinomio) è sicuramente di classe C^2 e quindi possiamo applicare il metodo della matrice Hessiana. Risulta per ogni $y > 0$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 12y \end{pmatrix} \quad detH(x,y) = 72y^2 - 36x^2 \ detH(0,1) > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) > 0 \Longrightarrow \text{ punto di minimo}$$

In grafico della funzione valutata nei punti $x^2 + y^2 \leq 9$ è riportato in figura:



2. È una serie di potenze a termini positivi, quindi o converge o diverge. Visto che il termine generale della serie è una funzione pari basterà studiarla in $\mathbb{R}_0^+$. Se $x = 0$ la serie diverge perché è a termini positivied il suo termine generale non è un infinitesimo. Imponiamo la sostituzione $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = y > 0$. La serie di potenze diventa allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} y^n.$$

Se applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)y^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{ny^n} = y.$$

Poiché $y := \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$ la serie converge assolutamente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e totalmente in ogni intervallo $[a, b], 0 \notin [a, b]$. La convergenza non è uniforme in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché se lo fosse, per il criterio di Cauchy risulterebbe:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che: per ogni $n \geq \overline{n}$ e per ogni $p \in \mathbb{N} \Rightarrow$ (per $x \to 0$)

$$\frac{n}{n+1} + \ldots + \frac{n+p}{n+p+1} \leq \varepsilon,$$

e dunque si otterrebbe la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$.
Calcoliamo la somma della serie utilizzando ancora la sostituzione $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = y$ per semplicità.

$$\begin{aligned} s(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-1}{n+1} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} y^n = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{y} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m} \\ &= \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} \log(1-y). \end{aligned}$$

Riapplicando la sostituzione $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = y$ si trova che la somma della serie $s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è definita da:

$$s(x) = (x^2+1) \log\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{1+x^2}{x^2}$$

Compito E

Matematica 2 (Meccanica) - I esonero 15 Aprile 2019

1. Data la funzione $f(x, y) = |y|(2x^2 + 3y^2 - 6)$ studiarne segno, derivabilità parziale e massimi e minimi relativi.

2. Studiare il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}, \qquad x \in \mathbb{R}$$
e dire se la serie converge totalmente nel suo insieme di convergenza.

Cenni di soluzione

1. vedi compito C.

2. Si tratta di una serie di potenze. $f_n(0) = 0$ per ogni $n \geq 1$ dunque $s(0) = 0$. Se $x \neq 0$ applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti. Risulta
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{|x|^n} = |x| < 1$$
e quindi la serie converge assolutamente se $x \in]-1, 1[$. Se $x = \pm 1$ allora $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^2+1}$ e quindi la serie converge per il criterio del confronto asintotico (si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente 2). Questo ci assicura anche la convergenza totale della serie in $[-1, 1]$ in quanto
$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2+1}.$$
Se $x > 1$ la serie è a termini positivi ed il criterio del rapporto ci dice che la serie diverge; mentre se $x < -1$ la serie è a segni alterni:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{n^2+1}.$$
Proviamo che la successione $\left(\dfrac{|x|^n}{n^2+1}\right)_n$ è monotona non decrescente, almeno da un certo m in poi.
$$\frac{|x|^n}{n^2+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2+1} \qquad \Longleftrightarrow \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} \leq |x|.$$
Sia $\varepsilon > 0$ tale che $1 + \varepsilon < |x|$, allora applicando la definizione di limite a $\dfrac{n^2+2n+2}{n^2+1}$ si ottiene l'esistenza di un $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq m$ risulta
$$1 - \varepsilon \leq \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} \leq 1 + \varepsilon < |x|$$
(il colore blu evidenzia la disuguaglianza che interessa).

Compiti A,B,C,D

Matematica 2 (Meccanica) - II esonero - 20 Maggio 2019

---

1. Calcolare il flusso del rot F uscente dalla porzione di sfera Σ: $x^2+y^2+z^2=1$ che soddisfa $y \geq 0$, $z \geq 0$, usando il teorema della divergenza, quando

   A) $F=(1,x^2,z)$.

   B) $F=(1,z,x^2)$

   C) $F=(z,1,x^2)$

   D) $F=(x^2,z,1)$.

2. Denotato con V la regione di spazio individuata nell'esercizio precedente, calcolarne la massa supponendo che la densità

   A) $\delta = z$.

   B) $\delta = 2z$.

   C) $\delta = z/2$.

   D) $\delta = 1-z$.

3. Sia $\omega = \left(\dfrac{2x}{x^2+y^2}+\dfrac{y}{1+x^2y^2}\right)dx+\left(\dfrac{2y}{x^2+y^2}+\dfrac{x}{1+x^2y^2}\right)dy$ calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ quando

   A) γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

   B) γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$

   C) γ è il quadrato di vertici $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$

   D) γ è il quadrato di vertici $(1,1),(1,-1),(-1,-1),(-1,1)$

Cenni di soluzione

1. Scriviamo innanzitutto la superficie Σ in coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x=\sin\varphi\cos t \\ y=\sin\varphi\sin t \\ z=\cos\varphi \end{cases} \qquad \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\ (z\geq 0);\quad t\in[0,\pi]\ (y\geq 0).$$

   (φ rappresenta la colatitudine, t la longitudine). Per poter applicare il teorema della divergenza consideriamo l'insieme

$$\begin{aligned} V &:= \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq 0, y\geq 0\}; \\ (&:= \{(r,t,\varphi):\ r\leq 1,\ \varphi\in[0,\pi/2],\ t\in[0,\pi]\} \quad \text{in coordinate sferiche}) \end{aligned}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
&Fr(V) = \Sigma \cup A \cup B\\
&A := \{(x,y,0): \ -1 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\} \subset z = 0, \qquad n_e = (0,0,-1)\\
&B := \{(x,0,z): \ -1 \le x \le 1, \ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2}\} \subset y = 0, \qquad n_e = (0,-1,0).
\end{aligned}$$

L'insieme V è un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e pertanto

$$\iiint_V \text{div (rot } F)\, dxdydz = \int_{Fr(V)} \text{rot } F \cdot n_e dS.$$

Siccome $F \in C^2(\mathbb{R}^3)$ allora div (rot F) $= 0$ e dunque

$$\int_\Sigma \text{rot } F \cdot n_e dS = -\int_A \text{rot } F \cdot n_e dS - \int_B \text{rot } F \cdot n_e dS.$$

Calcoliamo ora rot F:

Compito A : $F = (1, x^2, z)$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & x^2 & z \end{vmatrix} = (0,0,2x).$$

Risulta

$$\text{rot } F|_A \cdot n_e = (0,0,2x) \cdot ((0,0,-1) = -2x; \qquad \text{rot } F|_B \cdot n_e = (0,0,2x) \cdot ((0,-1,0) = 0.$$

Compito B : $F = (1, z, x^2)$

$$\text{rot } F|_A \cdot n_e = (-1,-2x,0) \cdot ((0,0,-1) = 0; \qquad \text{rot } F|_B \cdot n_e = (-1,-2x,0) \cdot ((0,-1,0) = 2x.$$

Compito C : $F = (z, 1, x^2)$

$$\text{rot } F|_A \cdot n_e = (0,1-2x,0) \cdot ((0,0,-1) = 0; \qquad \text{rot } F|_B \cdot n_e = (0,1-2x,0) \cdot ((0,-1,0) = 2x-1.$$

Compito D : $F = (x^2, z, 1)$

$$\text{rot } F|_A \cdot n_e = (-1,0,0) \cdot ((0,0,-1) = 0; \qquad \text{rot } F|_B \cdot n_e = (-1,0,0) \cdot ((0,-1,0) = 0.$$

Pertanto, passando a coordinate polari (rispettivamente nei piano $z = 0$ e $y = 0$) si ha:

Compito A:

$$\begin{aligned}
&\int_A \text{rot } F \cdot n_e dS = \iint_{\{x^2+y^2 \le 1\}} -2x \, dxdy = -2 \int_0^\pi \cos t \, dt \int_0^1 r^2 dr = 0;\\
&\int_B \text{rot } F \cdot n_e dS = \iint_{\{x^2+z^2 \le 1\}} 0 \, dxdz = 0;\\
&\int_\Sigma \text{rot } F \cdot n_e dS = 0.
\end{aligned}$$

Compito B:

$$\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot n_e dS = -\int_B 2x dS = 0.$$

Compito C:

$$\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot n_e dS = -\int_B (2x-1) dS = \text{area}(B) = \frac{\pi}{2}.$$

Compito D:

$$\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot n_e dS = 0.$$

2. Calcoliamo ora $m(V)$:

   Compito A: $(\delta = z)$

$$\begin{aligned} m(V) &= \iiint_V z dx dy dz = \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \int_0^{\pi} dt \int_0^1 r^3 dr = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d(\sin\varphi) \cdot \pi \cdot \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

   Compito B: $(\delta = 2z)$

$$m(V) = \iiint_V 2z dx dy dz = \frac{\pi}{4}$$

   Compito C: $(\delta = z/2)$

$$m(V) = \iiint_V \frac{z}{2} dx dy dz = \frac{\pi}{16}$$

   Compito D: $(\delta = 1 - z)$

$$m(V) = \iiint_V (1-z) dx dy dz = vol(V) - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{24}.$$

3. La forma differenziale lineare ω è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che è una regione con un buco, inoltre le sue componenti non sono positivamente omogenee, per cui non possiamo applicare direttamente nessuna delle due condizioni sufficienti. Proviamo a determinare direttamente l'esattezza, o meno, della forma differenziale. Dovrebbe risultare:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{y}{1+x^2y^2}\right) dx = \log(x^2+y^2) + \arctan xy + g(y) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2} + g'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2} \Longleftrightarrow g(y) = c \\ U(x,y) &= \int \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{y}{1+x^2y^2}\right) dx = \log(x^2+y^2) + \arctan xy + c. \end{aligned}$$

   $U \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ ed è una primitiva di ω. La forma differenziale è pertanto esatta. Siccome γ è generalmente regolare, chiusa con sostegno in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ allora

$$\oint_{\gamma} \omega = 0.$$

Analisi Matematica II - I esonero e appello del 18/11/2019

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno prese in considerazione

1 - civile, meccanica) Studiare i massimi e i minimi vincolati della funzione $f(x,y) = e^{xy}$ sotto in vincolo $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$.

1 - chimica, meccanica) Studiare la derivabilità parziale della funzione $f(x,y) = |y - x^2|x$.

2 - civile e meccanica) Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{1 + 2n + 3n^2}$, $\quad x \in [0, 2\pi]$ studiarne i vari tipi di convergenza e la derivabilità per serie, almeno nell'aperto $]0, 2\pi[$.

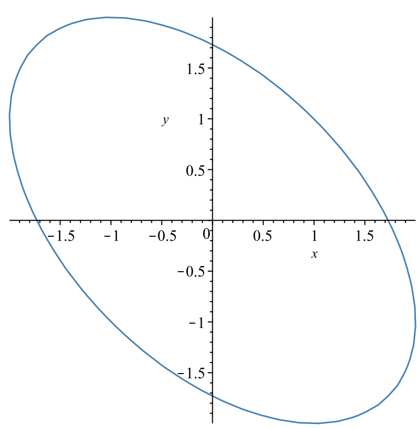
2 - chimica) Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2 + 2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$, studiarne tutti i tipi di convergenza.

3 - civile, chimica) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2yy' + x(4 - y^2) = 0 \\ y(0) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Cenno di svolgimento

1 - civile, meccanica)



La curva $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ è una ellisse reale ($\det A \neq 0$, $\det A_{33} > 0$) pertanto è un insieme compatto, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi la funzione, per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti; per il loro calcolo utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e poniamo

$$F(x, y, a) = e^{xy} + a(x^2 + y^2 + xy - 3).$$

Il vincolo risulta di classe almeno C^1 ed il suo gradiente si annulla solo nell'origine che non appartiene al vincolo.

Ne risulta che i punti di massimo e di minimo vincolato devono annullare il gradiente di F.

$$\begin{cases} ye^{xy} + a(2x + y) = 0 \\ xe^{xy} + a(2y + x) = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si può dedurre che $a \neq 0$ altrimenti dovrebbe risultare $(x, y) = (0, 0)$ che non è soluzione della terza equazione. Risulta

$$\nabla F = (0,0,0) \iff \begin{cases} y(e^{xy} + a) + 2ax = 0 \\ x(e^{xy} + a) + 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per y, la seconda per x ed uguagliando si ottiene

$$\begin{cases} y(e^{xy} + a) + 2ax = 0 \\ y = \pm x \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ 3x^2 = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -x \\ x^2 = 3 \end{cases} \iff$$
$$(+\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, +\sqrt{3}), (1, 1), (-1, -1).$$

Risulta $f(+\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, +\sqrt{3}) = e^{-3}$, mentre $f(1, 1) = f(-1, -1) = e$. I primi due punti sono pertanto di minimo assoluto vincolato per f, mentre i rimanenti due sono di massimo assoluto vincolato.

1 - chimica, meccanica) Risulta

$$f(x, y) = \begin{cases} (y - x^2)x & y \geq x^2 \\ (x^2 - y)x & y < x^2. \end{cases}$$

Pertanto negli aperti $y > x^2, y < x^2$ si possono applicare le regole di derivazione ed ottenere

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} y - 3x^2 & y > x^2 \\ 3x^2 - y & y < x^2 \end{cases} \qquad f'_y(x, y) = \begin{cases} x & y > x^2 \\ -x & y < x^2. \end{cases}$$

Nei punti $y = x^2$ (nei quali c'è un cambio di legge) per calcolare le derivate parziali dobbiamo utilizzare la definizione. Cominciamo con l'origine:

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = h^2 \quad \forall\, h \neq 0, \qquad f'_x(0, 0) = 0$$
$$\frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0 \quad \forall\, k \neq 0, \qquad f'_y(0, 0) = 0$$

Prendiamo ora in considerazione un punto (x_0, x_0^2) con $x_0 \neq 0$.

$$\frac{f(x_0 + h, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{h} = \frac{|h| \cdot |2x_0 + h|}{h}, \quad \forall\, h \neq 0, \qquad \nexists\ f'_x(x_0, x_0^2)$$
$$\frac{f(x_0, x_0^2 + k) - f(x_0, x_0^2)}{k} = \frac{|k| \cdot x_0}{k}, \qquad \forall\, k \neq 0, \qquad \nexists\ f'_y(x_0, x_0^2).$$

2 - civile e meccanica) La serie converge totalmente perché

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} \frac{|\sin nx|}{1 + 2n + 3n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Dunque la somma della serie è una funzione continua, visto che lo sono le f_n. Inoltre le f_n sono anche derivabili e la serie delle derivate è:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos nx}{1 + 2n + 3n^2}.$$

La serie delle derivate non converge totalmente perché

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[0,2\pi]} \frac{n|\cos nx|}{1+2n+3n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+2n+3n^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Converge però uniformemente in $[a,b] \subset]0,2\pi[$ come conseguenze del criterio di Dirichelet ($(\cos nx)_n$ ha le somme parziali equilimitate e $\dfrac{n}{1+2n+3n^2} \downarrow 0$ uniformemente). Allora fissato $x \in]0,2\pi[$ esisteranno a, b tali che $0 < a \le x \le b < 2\pi$ e dunque

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos nx}{1+2n+3n^2}.$$

Il risultato non si può estendere anche a $x = 0$, $x = 2\pi$.

2- chimica) Si tratta di una serie di potenze che ha raggio $r = 1$. Quindi non converge se $|x| > 1$. Inoltre converge totalmente in $[-1,1]$ perché

$$\sup_{x\in[-1,1]} \frac{x^n}{n^2+2} = \frac{1}{n^2+2}$$

e la serie $\sum_n \dfrac{1}{n^2+2}$ converge avendo lo stesso comportamento della serie $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$.

3 - civile, chimica) L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$y' = -\frac{x(4-y^2)}{2y}, \qquad f(x,y) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$$

Abbiamo sceltpo $y > 0$ perché il dato iniziale è $(0, \sqrt{3})$. Risulta:

$$-\frac{2y}{4-y^2}dy = xdx \quad \Longrightarrow \quad \int -\frac{2y}{4-y^2}dy = \int xdx$$

$$\log|4-y^2| = \frac{x^2}{2} + c,\ c\in\mathbb{R}, \quad \text{supponiamo, visto il dato iniziale, } 0<y<2 \quad \Longrightarrow$$

$$4-y^2 = e^{\frac{x^2}{2}+c} = ke^{\frac{x^2}{2}}, \qquad k\in\mathbb{R}^+$$

$$y^2 = 4-ke^{\frac{x^2}{2}}, \quad y(x) = \sqrt{4-ke^{\frac{x^2}{2}}}$$

imponendo la condizione iniziale si ottiene

$$\sqrt{3} = \sqrt{4-k} \quad \Longleftrightarrow \quad k = 1.$$

La soluzione cercata è $y(x) = \sqrt{4-e^{\frac{x^2}{2}}}$ definita nell'intervallo $|x| \le 2\sqrt{\log 4}$.
Si poteva studiare anche come una equazione di Bernoulli: con la sostituzione $y(x) = z^2(x)$, $2y(x)y'(x) = z'(x)$ si ottiene l'equazione lineare

$$\begin{aligned}
z'(x) &= xz(x) - 4x \qquad z(0) = 3\\
z(x) &= e^{\int xdx}\left\{-4\int xe^{-\int xdx}dx + c\right\}\\
z(x) &= e^{\frac{x^2}{2}}\left(4e^{-\frac{x^2}{2}} + c\right) = 4 + ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad z(0) = 3, \quad c = -1\\
y(x) &= +\sqrt{4-e^{\frac{x^2}{2}}} \quad \text{(la radice negativa si esclude)}
\end{aligned}$$

Analisi Matematica II - II esonero 9/12/2019

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno prese in considerazione

1 - civile, meccanica, chimica) Calcolare il volume della regione di spazio $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - x^2 \le 1,\ x \in [-1, 1], z \in [0, 1]\}$; disegnare l'insieme E.

2 - civile, meccanica, chimica) Sia $\omega = \dfrac{y(\log y - 1)}{x^2 + 1}\,dx + \arctan x \log y\, dy$. Dire dove è definita ω, se è chiusa, se è esatta. Se è esatta calcolare la primitiva che assume valore $\dfrac{\pi}{2}$ in $(-1, 1)$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ quando γ è la curva $y = 3 - x^3,\ -1 \le x \le 1$.

3 - civile, meccanica) Cacolare il seguente integrale superficiale $\displaystyle\int_\Sigma \frac{16xy}{x^2 + y^2} dS$ quando la superficie Σ è individuata da: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ :\ z = x^2 + y^2,\ 1 \le z \le 2\}$. Scrivere le equazioni del bordo di Σ ed il suo verso di percorrenza.

Cenno di svolgimento

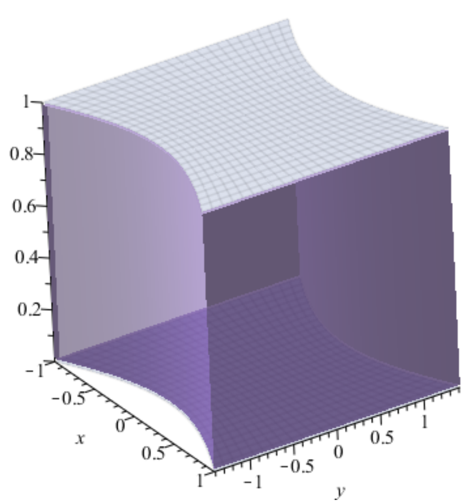
1 - civile, meccanica, chimica) L'insieme E risulta regolare e

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \in [-1, 1],\ -\sqrt{1 + x^2} \le y \le \sqrt{1 + x^2},\ z \in [0, 1]\,\}$$

pertanto

$$vol(E) \;=\; \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} dy \int_0^1 dz = 4\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\ dx = 2\sqrt{2} - 2\log(\sqrt{2} - 1).$$

(integrare per sostituzione $x^2 + 1 = (x + t)^2, \ldots x = \dfrac{1 - t^2}{2t},\ dx = -\dfrac{t^2 + 1}{2t^2} dt, \ldots$)



2 - civile, meccanica, chimica) La forma differenziale lineare ω è definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ che è una regione priva di buchi. Risulta $\omega \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, inoltre

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\log y}{x^2+1} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

e dunque la forma differenziale è chiusa e siccome è definita in un semplicemente connesso è anche esatta. Per determinare la classe delle sue primitive partiamo dal punto $P = (0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= -\int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt + \arctan x \int_1^y \log t dt = -\arctan x + \arctan x\,(y \log y - y + 1) + c = \\ &= y \arctan x (\log y - 1) + c \\ U(-1,1) &= \frac{\pi}{4} + c = \frac{\pi}{2} \quad \longrightarrow c = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Infine la curva γ è semplice ed è espressa in forma normale $y = y(x)$, $y \in C^1([-1,1])$ (è quindi regolare), ha sostegno in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ e collega il punto $(-1,4)$ (iniziale) al punto $(1,2)$ (finale); pertanto

$$\int_\gamma \omega = U(1,2) - U(-1,4) = \frac{\pi}{2}(\log 2 - 1) + \pi(\log 4 - 1) = \frac{\pi}{2}\,(5 \log 2 - 3)\,.$$

3 - civile, meccanica) La Superficie Σ è una porzione del paraboloide $z = x^2 + y^2$. Siccome $1 \le z \le 2$ e $x, y \ge 0$ la potremo scrivere in questo modo:

$$\Sigma := \{(x,y,x^2+y^2):\ 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\} = \{(r,t,r^2):\ r \in [0,\sqrt{2}],\ t \in [0,\pi/2]\}.$$

Si tratta ovviamente di una superficie regolare e la normale in ogni punto è data da: $n = (-2x, -2y, 1)$ per cui $dS = \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}$.

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \frac{16xy}{x^2+y^2} dS &= \iint_{\{1 \le x^2+y^2 \le 2,\, x \ge 0,\, y \ge 0\}} \frac{16xy}{x^2+y^2} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dxdy = \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_0^{\pi/2} \frac{16 r^2 \cos t \sin t}{r^2} \sqrt{1+4r^2}\, dt = \int_1^{\sqrt{2}} 8r\sqrt{1+4r^2}\, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \\ &= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+4r^2)^3}\right]_1^{\sqrt{2}} \cdot 1 = 18 - \frac{10}{3}\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Il bordo della superficie è individuato dalle seguenti curve:

$$\begin{aligned} +B\Sigma &= \{(t,0,t^2),\ 1 \le t \le \sqrt{2}\} \cup \{(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 2),\ 0 \le t \le \pi/2\} \cup \{(0,t,t^2),\ \sqrt{2} \ge t \ge 1\} \cup \\ &\quad \cup \{(\cos t, \sin t, 1),\ \pi/2 \ge t \ge 0\}. \end{aligned}$$